Organización
de las Naciones Unidas
para la Educación,
la Ciencia y la Cultura

Tercer Estudio
Regional Comparativo
y Explicativo

# APORTES PARA LA ENSEÑANZA DE LA **MATEMÁTICA**

Publicado en 2016 por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, 7, place de Fontenoy, 75352 París 07 SP, Francia y la Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe, OREALC/UNESCO Santiago.

© UNESCO 2016

Esta publicación está disponible en acceso abierto bajo la licencia Attribution-ShareAlike 3.0 IGO (CC-BY-SA 3.0 IGO) (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/igo/). Al utilizar el contenido de la presente publicación, los usuarios aceptan las condiciones de utilización del Repositorio UNESCO de acceso abierto (www.unesco.org/open-access/terms-use-ccbysa-sp).

Los términos empleados en esta publicación y la presentación de los datos que en ella aparecen no implican toma alguna de posición de parte de la UNESCO en cuanto al estatuto jurídico de los países, territorios, ciudades o regiones ni respecto de sus autoridades, fronteras o límites.

Las ideas y opiniones expresadas en esta obra son las de los autores y no reflejan necesariamente el punto de vista de la UNESCO ni comprometen a la Organización.

Diseño y diagramación:
Acento en la Ce SPA. www.acentoenlace.cl

*Impreso en Chile*

PRE

## CRÉDITOS

Aportes para la
Enseñanza de la Matemática
Este informe ha sido elaborado
por MIDE UC, por encargo de la
Oficina Regional de Educación para
América Latina y el Caribe,
OREALC/UNESCO Santiago

Autores
M. Paulina Flotts
Jorge Manzi
Carla Barrios
Verónica Saldaña
Nicolás Mejías
Andrea Abarzúa

## AGRADECIMIENTOS

La OREALC/UNESCO Santiago agradece especialmente por la revisión del contenido técnico de esta publicación al Dr. Patricio Felmer y al Dr. Felipe Célèry, ambos investigadores del Centro de Investigación Avanzada en Educación, CIAE, y del Centro de Modelamiento Matemático (CMM), de la Universidad de Chile.Las precisiones y comentarios aportados por ellos han sido una valiosa contribución para que este volumen, Aportes para la Enseñanza de la Matemática, sea un documento de gran calidad y contribuya efectivamente al desarrollo de las capacidades docentes de la región.
La OREALC/UNESCO Santiago agradece también en forma particular a los especialistas de área del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Karla Alpízar Mora y Mauricio Vargas, y a las especialistas de área del Ministerio de Educación de Perú, Miriam Arias Reyes y Olimpia Castro Mora, por sus valiosos comentarios a este documento.

# FACIO

La educación juega un papel primordial y transversal en la vida de las personas, al ser una herramienta que ayuda a crear sociedades más justas, equitativas y tolerantes. La Agenda de Desarrollo Sostenible 2030 así lo reconoce, al incluirla no solo como Objetivo N° 4, que establece "garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y de promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos y todas", sino al darle un protagonismo que atraviesa todos los demás ODS.

En este contexto, y teniendo como marco de referencia el Derecho a la Educación, es que OREALC/UNESCO Santiago, a través del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, LLECE, presentó en el 2015 los resultados principales del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo, TERCE. El estudio, que mostró los logros de aprendizaje y sus factores asociados en 15 países de América Latina más el estado mexicano de Nuevo León, ha sido una contribución a la toma de decisiones de políticas educativas y al mejoramiento de los sistemas educativos en general.

Sin embargo, el TERCE también busca ser un instrumento que sirva a los principales actores del quehacer educativo: los docentes.

Existe un amplio consenso que ratifica que el docente es el actor vinculante más importante en el logro de aprendizaje del estudiante. Por esta razón, la OREALC/UNESCO Santiago presenta la colección Aportes para la Enseñanza, en las cuatro áreas pedagógicas que cubre el TERCE (Lectura, Escritura, Matemática y Ciencias Naturales). Esta publicación constituye una poderosa herramienta para el fortalecimiento de las capacidades docentes, al aportar a este importante grupo orientaciones que les permita ajustar sus prácticas pedagógicas en el aula.

Aportes para la Enseñanza de la Matemática entrega propuestas didácticas para los docentes sobre los conocimientos, destrezas, capacidades, habilidades, principios, valores y actitudes necesarios para que los estudiantes de la región aprendan a desarrollar su potencial, hagan frente a situaciones, tomen decisiones utilizando la información disponible y resuelvan problemas, aspectos claves que los habilitan para la inserción en la sociedad del conocimiento.

Con este documento, los resultados del TERCE se aterrizan en un nivel conceptual y práctico enfocado a los docentes, relevando el valor de una evaluación masiva no solo para la investigación y la elaboración de políticas sectoriales en educación, sino para el trabajo diario en el salón de clases.  Contamos con que los Aportes para la Enseñanza cumplan a cabalidad este objetivo y, con ello, a los Objetivos del Desarrollo Sostenible.

**Atilio Pizarro**

Jefe de la Sección Planificación, Gestión, Monitoreo y Evaluación UNESCO Santiago

Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe

# CONTENIDOS

# El Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE)

## Propósito del estudio

Durante las últimas décadas, los países de América Latina y el Caribe han conseguido avances significativos en materia de alfabetización y cobertura de sus sistemas educativos, pero continúa pendiente el desafío de mejorar la calidad de la educación. Ya desde el Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo (SERCE) del Laboratorio Latinoamericano de la Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), realizado en el año 2006 en 16 países de la región, se constata, por ejemplo, que algo más de la mitad de los niños de sexto grado alcanza apenas los niveles de desempeño inferiores en lectura, matemática y ciencias (niveles I y II, de cuatro niveles posibles). Resultados que muestran la magnitud del déficit en el objetivo de conseguir que los estudiantes adquieran los aprendizajes necesarios para un dominio más profundo de los conocimientos y un desarrollo de habilidades más avanzadas en las distintas disciplinas evaluadas.

A partir de antecedentes como éste, el LLECE impulsa la realización del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), el que se aplica en 15 países y un estado subnacional, entre los años 2010 y 2014. El propósito principal de este estudio es evaluar la calidad de la educación en los países de América Latina y el Caribe y, junto con ello, identificar factores asociados a los logros de aprendizaje. De este modo, el TERCE no solamente busca entregar un diagnóstico acerca de los niveles de aprendizaje de los estudiantes de la región, sino también aportar información que contribuya a la identificación de factores asociados a dichos logros, para que, a partir de ese conocimiento, se contribuya en la formulación de políticas públicas.

TERCE evaluó logros de aprendizaje en las disciplinas de lenguaje (lectura y escritura) y matemática en tercer y sexto grados de escuela primaria y, además, ciencias naturales en sexto grado. El Estudio comenzó el año 2010 con la XXVI Reunión de Coordinadores Nacionales en la ciudad de Brasilia (13 y 14 de diciembre). Desde entonces, la Coordinación Técnica del LLECE en la OREALC UNESCO Santiago, en colaboración con las Coordinaciones Nacionales y con sus socios implementadores, MIDE UC y la Universidad Diego Portales (UDP), ejecutaron este proyecto de acuerdo a las siguientes fases:

| Año | Tarea | Institución a cargo |
|---|---|---|
| 2011 | Análisis curricular | ICFES |
| | Elaboración de ítems | MIDE UC, países |
| 2012 | Desarrollo marco de factores asociados | MIDE UC, UDP |
| | Elaboración de cuestionarios | UDP |
| | Diseño muestral | OREALC / UNESCO Santiago |
| | Desarrollo software | IEA |
| | Arbitraje de muestreo | IEA |
| | Aplicación piloto | MIDE UC, UDP, países |
| 2013 | Aplicación definitiva | MIDE UC, UDP, países |
| 2014 | Análisis y elaboración de informes | MIDE UC, UDP, OREALC / UNESCO Santiago |

Tal como se indicó previamente, en el TERCE participaron 15 países más el estado mexicano de Nuevo León. En total, se evaluaron 195.752 estudiantes distribuidos en 3.065 escuelas.

Para lograr su objetivo, el TERCE utiliza dos tipos de instrumentos de recolección de información. El primero corresponde a pruebas de evaluación de aprendizaje y el segundo, son los cuestionarios de contexto. Estos cuestionarios fueron desarrollados tomando en consideración el marco teórico del estudio. El TERCE cuenta con cuestionarios para estudiantes, familias, profesores y directores. La información consultada mediante estos instrumentos hace posible realizar análisis de factores asociados y en el reporte correspondiente se dan a conocer algunos hallazgos sobre la relación entre resultados de aprendizaje y: (1) características de las escuelas; (2) características de los docentes; y, (3) características socioeconómicas de los estudiantes y sus familias.

Para la construcción de las pruebas se desarrollaron talleres de elaboración de ítems con la presencia de los países participantes del estudio. Estos talleres tenían el doble objetivo de elaborar los instrumentos necesarios para la evaluación de los aprendizajes y de capacitar técnicamente a los equipos nacionales. El primer paso para la construcción de los instrumentos consistió en una revisión de los marcos curriculares de los países participantes, el cual estuvo a cargo del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). Esta acción permitió identificar los elementos comunes en los currículos y así definir una estructura de prueba pertinente para medir la calidad de la educación a nivel regional.

Finalmente, cabe precisar que los resultados sobre logros de aprendizaje se trabajaron bajo dos perspectivas. Por una parte, se obtuvieron las puntuaciones medias de cada país en cada prueba (en una escala con una media de 700 puntos y una desviación estándar de 100) y por otra, se establecieron puntos de corte para definir los niveles de desempeño en cada prueba, lo que permite diferenciar los porcentajes de estudiantes que quedan ubicados en cada nivel y, a partir de ello, conocer qué saben y son capaces de hacer en las disciplinas evaluadas.

## Propósito de este libro

Este libro forma parte de una colección más amplia, denominada “Aportes para la Enseñanza”. Se trata de cuatro ejemplares, uno por cada área evaluada (lectura, escritura, matemática y ciencias naturales), todos con el mismo propósito fundamental: utilizar los resultados del TERCE para acercar los resultados de la evaluación de logros de aprendizaje a los docentes y entregarles herramientas para su trabajo en el aula.

La evaluación adquiere sentido cuando es capaz de generar información que sirva para tomar decisiones e iluminar las acciones de mejora. Diseñar intervenciones educativas e implementar remediales sin contar con datos confiables acerca de los niveles de aprendizaje de los estudiantes aumenta el riesgo de desviar el foco y no distinguir aquellos ámbitos que realmente requieren apoyo y mejoramiento; en otras palabras, puede haber un esfuerzo y una inversión de tiempo, energía y recursos que estén desalineados de las verdaderas necesidades de los estudiantes, escuelas y sistemas educativos, transformándose en esfuerzos e inversiones que no den los frutos esperados. Por otra parte, una evaluación, por muy robusta que sea técnicamente, pero que no genere información de calidad para ser usada por docentes y directivos, también es un esfuerzo y una inversión que no genera impacto.

Desde esta perspectiva, la colección de "Aportes para la Enseñanza", que también tuvo una versión a partir de los resultados de SERCE, se actualiza en base a los resultados del TERCE. Lo que se busca es, entonces, movilizar el trabajo educativo, dando luces respecto de las áreas que aparecen como más descendidas y que requieren, por tanto, ser trabajadas con mayor énfasis, fuerza y dedicación. Se trata de hacer fecunda la evaluación que con tanto esfuerzo se llevó adelante en el marco del TERCE por los países e instituciones asociadas.

Este libro, "Aportes para la Enseñanza de la Matemática", se organiza en cinco secciones. La primera hace una presentación de la prueba, relevando los aprendizajes que evalúa. La segunda sección detalla los resultados de los estudiantes en los distintos dominios y procesos cognitivos evaluados. La tercera describe el enfoque de la enseñanza de la matemática en la región, a partir de la revisión del análisis curricular que sirve como marco de evaluación de las pruebas, especificando los propósitos, objetivos, características y orientación de la enseñanza de esta disciplina. La cuarta sección se acerca al tema de la evaluación, y el modo en que es posible monitorear el avance de los estudiantes en la adquisición de los aprendizajes centrales de la disciplina. Finalmente, se abordan los resultados del TERCE y su relación con el trabajo docente; se muestran ejemplos de preguntas que representan distintos niveles de logro y se entregan sugerencias o propuestas de prácticas pedagógicas para promover que los estudiantes alcancen los niveles más avanzados.

Confiamos en que el texto "Aportes para la Enseñanza de la Matemática" sea un valioso insumo para que los maestros puedan sacar provecho de los resultados del TERCE, transformándose en una herramienta de trabajo que vaya en beneficio de los estudiantes. Este hecho constituye uno de los objetivos esenciales de OREALC/UNESCO Santiago con la calidad de la educación y en particular con la evaluación de ésta, pues consideramos que el destino final de los estudios debe ser el aula, donde efectivamente tienen lugar los procesos de mejora del aprendizaje. Este es el valor y fin último de los textos de "Aportes para la Enseñanza", y es el esfuerzo en que estamos comprometidos.

(...)una evaluación, por muy robusta que sea técnicamente, pero que no genere información de calidad para ser usada por docentes y directivos, es un esfuerzo y una inversión que no genera impacto.

# La prueba de matemática

## Aspectos evaluados en la prueba de matemática del TERCE

Al igual que en todas las pruebas del TERCE, el enfoque de evaluación en matemática se funda en la perspectiva curricular de los países participantes en el estudio. La alineación curricular deriva de la actualización que el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) hizo del análisis curricular elaborado para SERCE, el cual fue realizado a partir de los criterios compartidos en los documentos curriculares, los textos escolares y los enfoques sobre la evaluación de los países. Para el desarrollo de instrumentos del TERCE se efectuó una revisión del análisis curricular elaborado para el SERCE, identificando los cambios curriculares ocurridos desde entonces e incorporando en el análisis los currículos de los países que no participaron en el SERCE. Para esta revisión, al igual que en el SERCE, se solicitó a los países participantes que enviaran la información sobre currículo, evaluación y textos escolares. Este ajuste curricular se realizó con información enviada por: Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Paraguay, Perú, República Dominicana y Uruguay. En base a este análisis, el ICFES desarrolló un documento de ajuste al análisis curricular del SERCE, a partir del cual se elaboraron las tablas de especificaciones para las pruebas del TERCE.

Los aprendizajes evaluados en la prueba de matemática del TERCE consideran cinco dominios y tres procesos cognitivos. Los dominios evaluados son:

1. **Dominio numérico, que implica los siguientes aprendizajes:**
   **a.** Significado del número y la estructura del sistema de numeración, que conlleva la capacidad para la lectura, interpretación y escritura de números en contextos diversos.
   **b.** Interpretación de situaciones referentes a la representación y construcción de relaciones numéricas en diversos contextos, así como la pertinencia de ello, sin dejar de lado las operaciones convencionales y sus propiedades.
   **c.** Utilización de las operaciones adecuadas a la situación que se le presenta, entre las que están la adición y sustracción, multiplicación y división, potenciación y radicación; la justificación de procedimientos y validación de soluciones.

2 **Dominio geométrico, que implica los siguientes aprendizajes:**

**a.** Significado de los atributos y propiedades de figuras y objetos bidimensionales y tridimensionales; lectura, interpretación y representación de los mismos. Nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad; interpretación de situaciones en las que se reconoce con pertinencia representaciones de las posiciones y relaciones geométricas convencionales, de sus propiedades y de su efecto.

**b.** Reconocimiento y aplicación de traslaciones y giros de una figura, lectura e interpretación de desplazamientos y rotaciones de la misma en el plano. Nociones de congruencia y semejanza entre figuras (casos de ampliación y reducción) y, lectura, interpretación y representación de éstas en el plano, así como sus propiedades.

**c.** Interpretación de los diseños y construcciones de cuerpos y figuras geométricas, interpretación de situaciones en las que se reconocen algunas representaciones de ángulos, polígonos y sus clasificaciones.

3 **Dominio de la medición, que implica los siguientes aprendizajes:**

**a.** Reconocer y diferenciar diversas magnitudes, así como interpretar situaciones en las que se hacen con pertinencia estimaciones de las mismas y de rangos.

**b.** Seleccionar y usar unidades de medida y patrones.

**c.** Usar adecuadamente las monedas y reconocer las relaciones entre sus magnitudes, como también la justificación de procedimientos y validación de soluciones.

4 **Dominio estadístico, que implica los siguientes aprendizajes:**

**a.** Interpretación de situaciones, selección, recolección, organización e interpretación de información. Reconocer e identificar las relaciones entre los datos.

**b.** Identificación y uso de medidas de tendencia central (promedio, media y moda). Relación entre las medidas.

**c.** Uso oportuno de diversas representaciones de datos para la resolución de problemas, así como para la justificación de procedimientos y la validación de soluciones.

5 **Dominio de la variación, que implica los siguientes aprendizajes:**

**a.** Identificar regularidades y patrones numéricos y geométricos en representaciones diversas.

**b.** Identificación de variables y la interpretación de situaciones en las que se distinguen las mismas. Descripción de fenómenos de cambio y dependencia, que considera la resolución de problemas y la valoración de la pertinencia del proceso seguido.

**c.** Noción de función, uso de conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad y a la variación inversa en contextos aritméticos y geométricos en la resolución de problemas.

**d.** Uso pertinente de las diversas representaciones de relaciones matemáticas y sus variaciones. Justificación de procedimientos y validación de soluciones.

Las pruebas del TERCE de matemática consideran también los siguientes procesos cognitivos:

1 **Reconocimiento de objetos y elementos:** implica la identificación de hechos, conceptos, relaciones y propiedades matemáticos, expresados de manera directa y explícita en el enunciado.

2 **Solución de problemas simples:** exige el uso de información matemática que

está explícita en el enunciado, referida a una sola variable, y el establecimiento de relaciones directas necesarias para llegar a la solución.

3 **Solución de problemas complejos:** requiere la reorganización de la información matemática presentada en el enunciado y la estructuración de una propuesta de solución a partir de relaciones no explícitas, en las que se involucra más de una variable.

## Tabla de especificaciones y estructura de la prueba

A partir de estas definiciones básicas sobre dominios y procesos cognitivos, se definieron indicadores de evaluación específicos y se determinaron las tablas de especificaciones que dieron origen a los ítems y estructura final de las pruebas de tercer y sexto grados.

Los aspectos evaluados en cada dominio temático tercer grado son los siguientes:

### DOMINIO **Numérico**

Números naturales y sistema de numeración decimal:

- Uso, funciones, lectura, escritura, orden, relaciones y propiedades, conteo, estimación.
- Números pares e impares.
- Resolución de problemas que involucran adición, sustracción y significado inicial de multiplicación y división.
- Significado inicial de la fracción como parte de un todo.

### DOMINIO **Geométrico**

- Localización en el espacio.
- Puntos de referencia.
- Desplazamientos y transformaciones.
- Formas geométricas.
- Cuadrados y cubos.

### DOMINIO **de la Medición**

- Contextos de uso de los instrumentos de medida.
- Estimación de medidas.
- Sistemas monetarios.
- Magnitudes lineales y sistema métrico decimal.
- Uso de instrumentos de medida e interpretación de los valores.

## DOMINIO **Estadístico**

- Recolección y organización de la información.
- Creación de registros personales.
- Técnicas de observación.
- Pictograma.
- Diagrama de barras.

## DOMINIO **de la Variación**

- Secuencias y patrones

La prueba de matemática de tercer grado responde a la siguiente distribución de preguntas (fundamentalmente de selección múltiple, más algunas preguntas abiertas) según dominio y proceso cognitivo:

| Dominio | Proceso | | | Total | % |
|---|---|---|---|---|---|
| | Reconocimiento de objetos y elementos | Solución de problemas simples | Solución de problemas complejos | | |
| Números | 6 | 7 | 5 | 18 | 24% |
| Geometría | 7 | 8 | 2 | 17 | 23% |
| Medición | 4 | 12 | 5 | 21 | 28% |
| Estadística | 2 | 5 | 3 | 10 | 14% |
| Variación | 4 | 3 | 1 | 8 | 11% |
| Total | 23 | 35 | 16 | 74 | 100% |
| % | 31% | 47% | 22% | 100% | ---- |

***Nota:*** *Los porcentajes de la última columna han sido redondeados al entero, por tanto, no suman exactamente 100%.*

En el caso de la prueba de sexto grado, los aspectos evaluados en cada dominio temático son los siguientes:

## DOMINIO **Numérico**

Números naturales y sistema de numeración decimal:

- Uso y orden.
- Valor posicional.
- Potenciación y radicación.
- Criterios de divisibilidad.
- Fracciones, relación parte-todo, equivalencia, fracciones decimales. Representación en la recta.

## DOMINIO **Geométrico**

- Representación de figuras planas.
- Polígonos.
- Sistemas de referencia.
- Ejes de simetría.
- Perpendicularidad.
- Paralelismo.
- Ángulos y su clasificación.
- Cubo, prisma y cilindro.
- Transformaciones en el plano.
- Razones y proporciones.
- Proporcionalidad directa.

## DOMINIO **de la Medición**

- Sistemas de unidades: longitud, peso (masa).
- Perímetro, área, volumen.
- Ángulos, tiempo.
- Cambio de moneda.

## DOMINIO **Estadístico**

- Representación gráfica.
- Promedio.
- Valor más frecuente.
- Diagramas.
- Tabulación.
- Recopilación de datos.

## DOMINIO **de la Variación**

- Patrones de formación.
- Uso e interpretación de modelos y representaciones.

La prueba de matemática de sexto grado responde a la siguiente distribución de preguntas (fundamentalmente de selección múltiple, más algunas preguntas abiertas) según dominio y proceso cognitivo:

| Dominio | Proceso | | | Total | % |
|---|---|---|---|---|---|
| | Reconocimiento de objetos y elementos | Solución de problemas simples | Solución de problemas complejos | | |
| Campo numérico | 6 | 9 | 5 | 20 | 20% |
| Campo geométrico | 8 | 9 | 8 | 25 | 26% |
| Campo de la medición | 3 | 14 | 3 | 20 | 20% |
| Campo estadístico | 3 | 5 | 5 | 13 | 13% |
| Campo de la variación | 4 | 10 | 6 | 20 | 20% |
| Total | 24 | 47 | 27 | 98 | 100% |
| % | 24% | 48% | 28% | 100% | ---- |

***Nota:*** *Los porcentajes de la última columna han sido redondeados al entero, por tanto, no suman exactamente 100%.*

# Resultados por dominio y proceso cognitivo en matemática

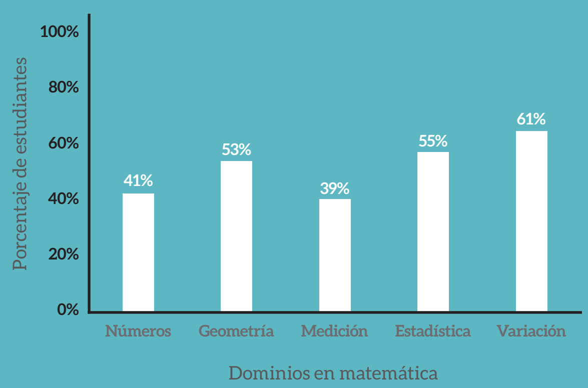
Este capítulo presenta algunos resultados de aprendizaje específicos de los estudiantes en la prueba de matemática del TERCE, complementando aquellos que se detallan en el Informe de Logros de Aprendizaje, publicado en julio de 2015[1]. Se organiza en dos secciones: una con los resultados de tercer grado y otra, con los de sexto. Ambas secciones tienen la misma estructura: en primer lugar, se presentan los resultados descriptivos de los rendimientos a nivel regional según dominio y proceso cognitivo evaluado, y en segundo lugar, se muestran estos mismos resultados pero desagregados para cada país participante en el estudio, además del estado mexicano de Nuevo León.

## Resultados tercer grado

### Resultados por dominio y proceso cognitivo en la región

El Gráfico 1 que se presenta a continuación muestra el porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada dominio de aprendizaje en la prueba TERCE de tercer grado. Se puede apreciar, en términos comparativos, que el dominio en que una mayor proporción de estudiantes que responde correctamente las preguntas es el de Variación, mientras que los dominios de Números y Medición muestran la menor proporción de respuestas correctas.

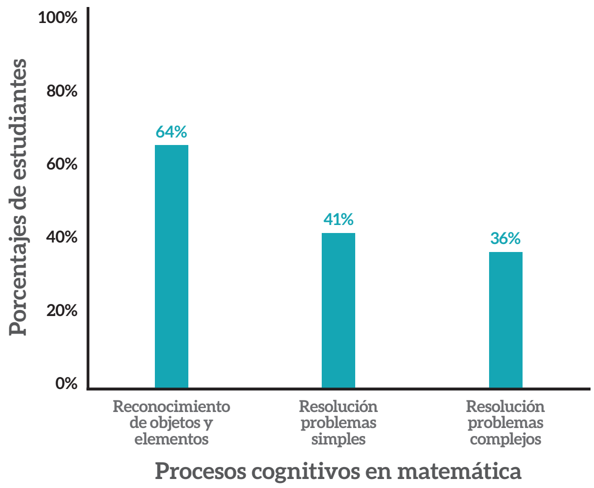
**Gráfico 1:** Porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada dominio de aprendizaje en la prueba TERCE de tercer grado.




[1] *Ver en http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002435/243532S.pdf*

En el Gráfico 2 se observa el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente los ítems asociados a cada proceso cognitivo evaluado en la prueba TERCE de tercer grado. En estos resultados se puede apreciar que una mayor proporción responde correctamente los ítems asociados al Reconocimiento de objetos y elementos, comparado con aquellos que las preguntas que miden la Resolución de problemas simples o complejos.

**Gráfico 2:** Porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada proceso cognitivo evaluado en la prueba TERCE de tercer grado.




## Resultados por dominio y proceso cognitivo evaluado en cada uno de los países participantes en el estudio

### Resultados según dominio evaluado

A continuación se presentan una serie de gráficos que muestran el porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems de cada dominio de la prueba en cada país. En los gráficos de barras, además, se representa a través de una línea el promedio a nivel regional.

Tal como se aprecia, hay dominios en que el porcentaje de estudiantes que contesta correctamente los ítems es más homogéneo entre países, mientas que otros dominios muestran resultados más heterogéneos. El primer caso (resultados más parecidos entre países) corresponde a Medición (donde el porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems varía entre 25% y 52%) y Números (con porcentajes de estudiantes que varía entre 26% y 55%). La mayor heterogeneidad entre países se observa en el dominio de Variación (donde hay un país en que el 34% de los estudiantes contesta correctamente esos ítems y otro en que la cifra llega a 83%).

**Gráfico 3:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Números en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

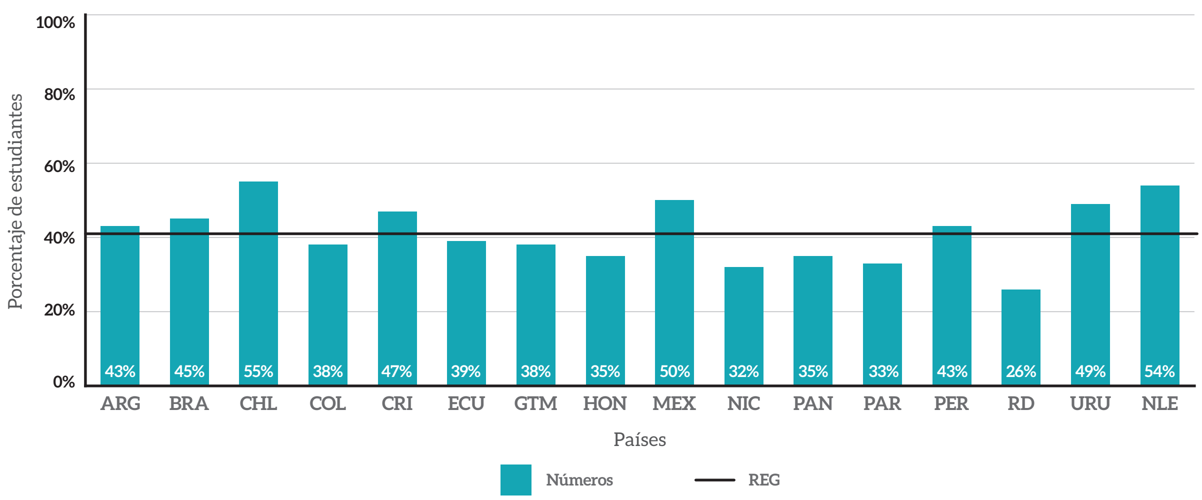


**Gráfico 4:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Geometría en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

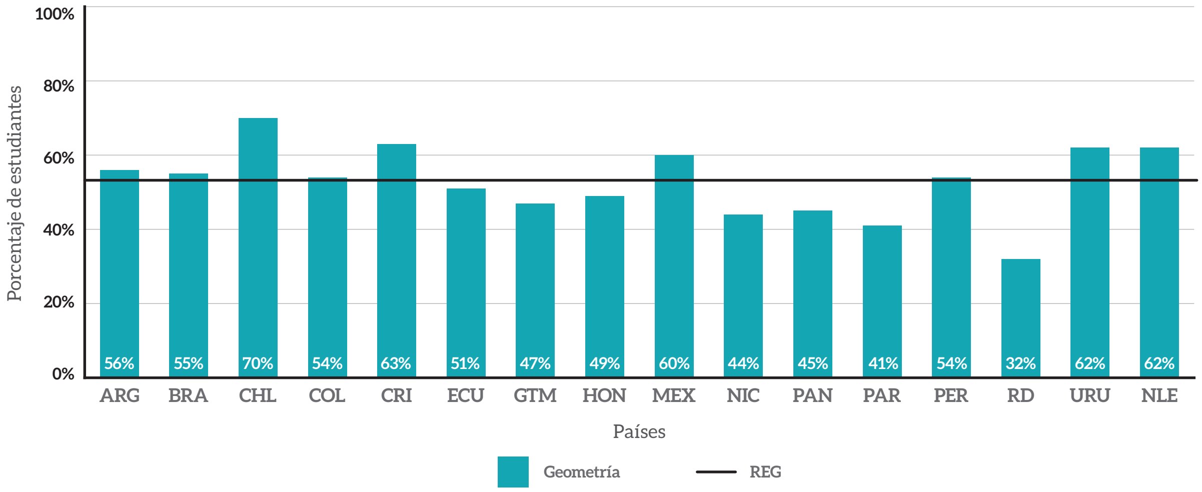



**Gráfico 5:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Medición en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

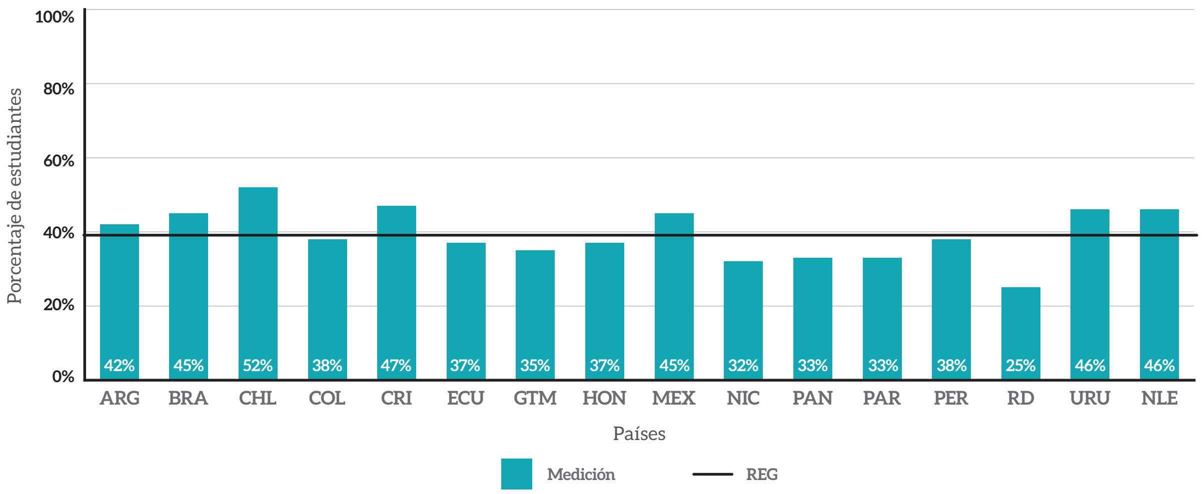



**Gráfico 6:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Estadística en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

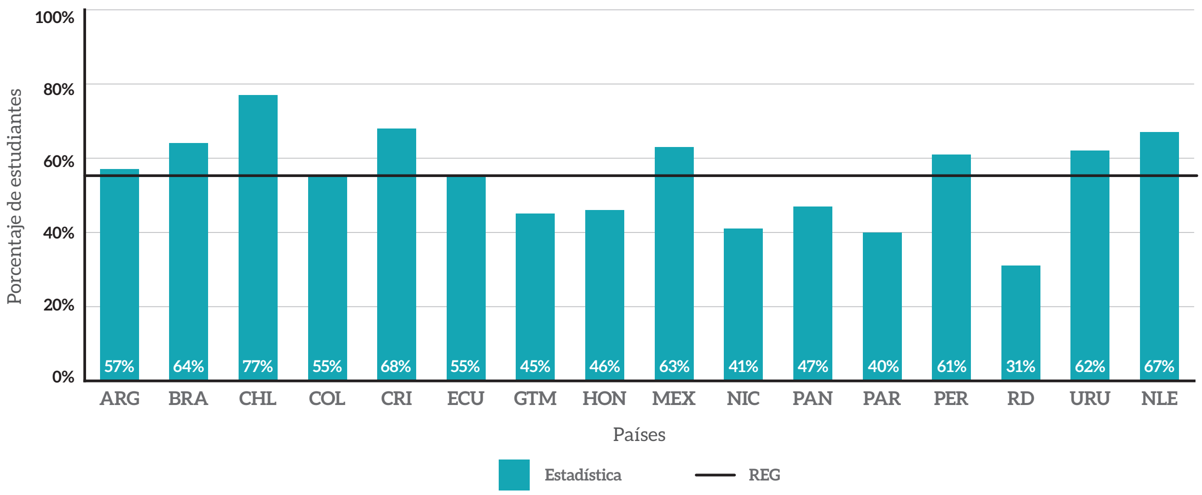
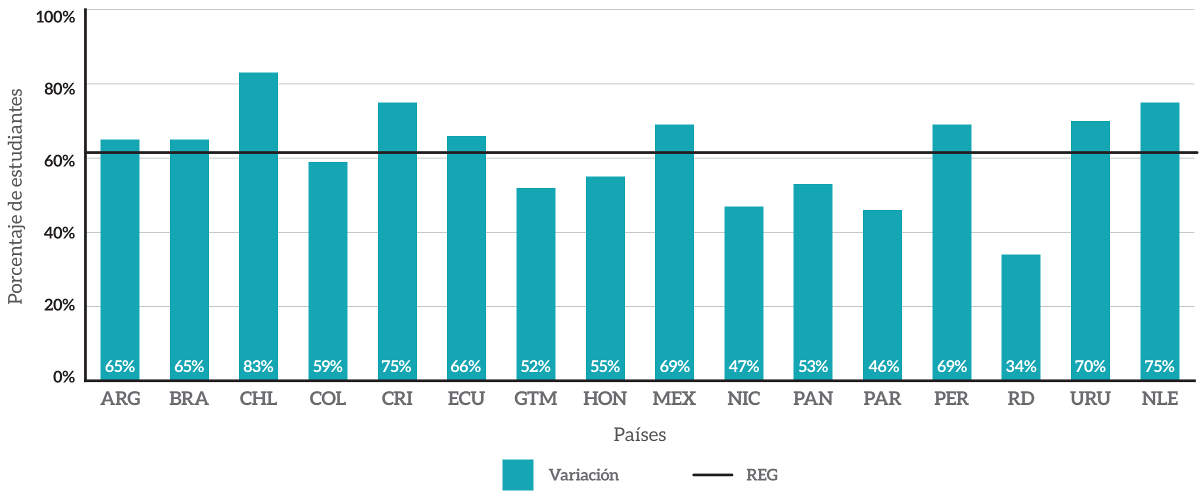


**Gráfico 7:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Variación en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.




## Resultados según proceso cognitivo

Los gráficos que se muestran a continuación (8, 9 y 10) siguen la misma lógica que los precedentes, pero esta vez haciendo referencia al porcentaje de estudiantes de cada país que responde correctamente los ítems asociados a cada uno de los tres procesos cognitivos evaluados en el TERCE. En los resultados se aprecia que la mayor heterogeneidad entre países se da en el Reconocimiento de objetos y elementos, donde el porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems varía entre 39% y 81%, mientras que la Resolución de problemas complejos tiene un rendimiento más homogéneo entre los países de la región (con porcentajes de estudiantes que responde correctamente los ítems que oscilan entre 21% y 49%).

**Gráfico 8:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems referidas a la habilidad de Reconocimiento de objetos y elementos en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

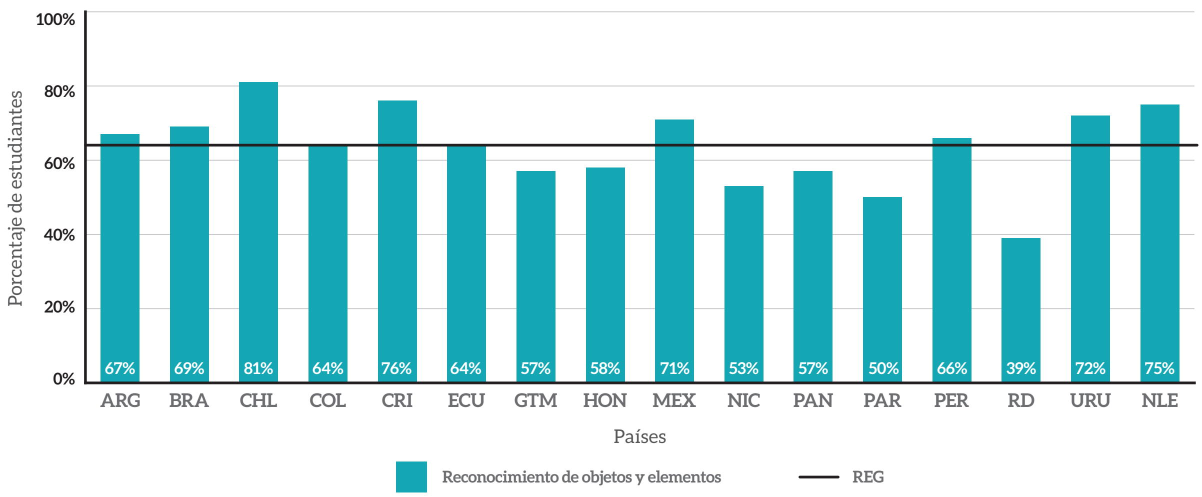


**Gráfico 9:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems referidas a la habilidad de Resolución de problemas simples en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

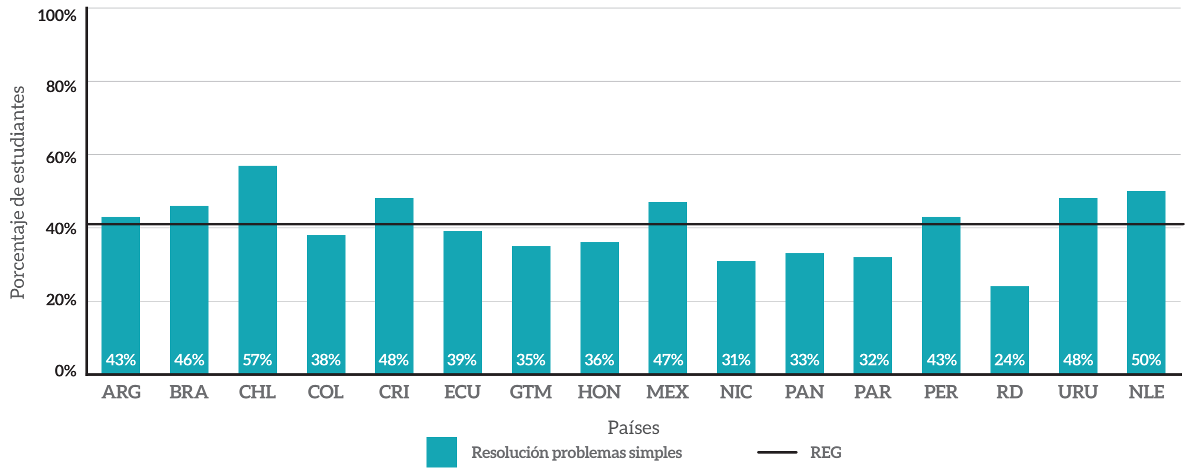
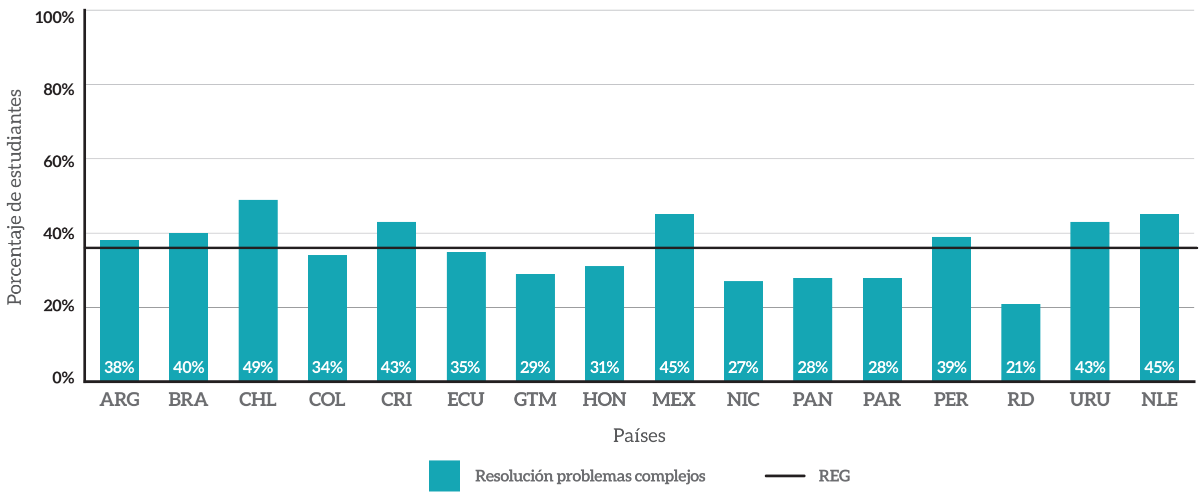



**Gráfico 10:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems referidas a la habilidad de Resolución de problemas complejos en la prueba TERCE de tercer grado, comparados con la media regional.

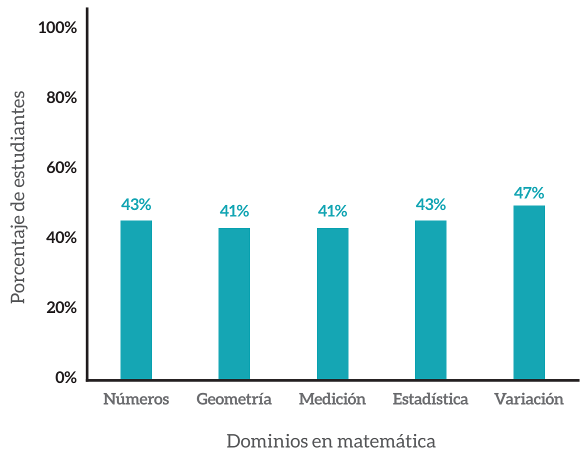



# Resultados sexto grado

## Resultados por dominio y proceso cognitivo en la región

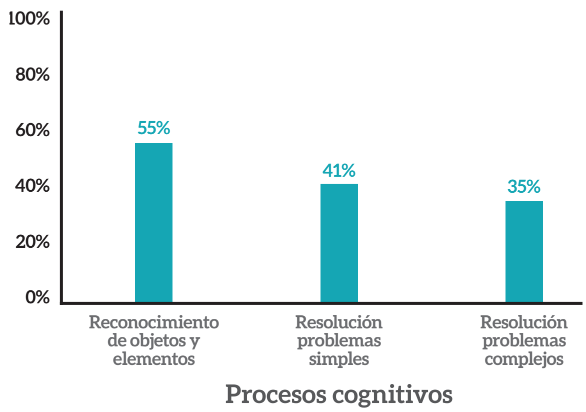
Siguiendo el esquema de presentación de resultados de tercer grado, el Gráfico 11 muestra el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente los ítems de cada dominio evaluado en el TERCE, esta vez en la prueba de sexto grado. Se observa que no hay mayores diferencias entre dominios (como sí las hubo en el caso de tercero): la diferencia más grande se produce entre el dominio de la Variación, con el 47% de estudiantes que responde correctamente estos ítems, y los dominios de la Medición y Geometría, con el 41% de estudiantes en ambos casos.

**Gráfico 11:** Porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada dominio de aprendizaje en la prueba TERCE de sexto grado.



Al analizar los resultados a nivel de procesos cognitivos, la situación es diferente. En este ámbito sí se aprecian distancias significativas, como muestra el Gráfico 12: el porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems de Reconocimiento de objetos y elementos es sustancialmente más alto que la proporción de niños y niñas que contesta acertadamente los ítems asociados a la habilidad de Resolución de problemas complejos.

**Gráfico 12:** Porcentaje de estudiantes de la región que respondió correctamente los ítems de cada proceso cognitivo evaluado en la prueba TERCE de sexto grado.




## Resultados por dominio y proceso cognitivo evaluado en cada uno de los países participantes en el estudio

### Resultados según dominio evaluado

A continuación se presenta una serie de gráficos con la información referida al porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems de cada dominio en la prueba de sexto grado en cada país (gráficos 13, 14, 15, 16 y 17). Al igual que en los resultados de tercer grado, en los gráficos de barras se representa la media regional a través una línea.

En general, los porcentajes de estudiantes que responden correctamente las preguntas de cada dominio no son tan dispares entre países como en el caso de tercer grado. Las diferencias entre el país con mayor y menor proporción están en torno a los 30 puntos porcentuales, siendo el dominio de Medición el que muestra la menor heterogeneidad entre países (al igual que en el caso de tercer grado).

**Gráfico 13:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Números en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.

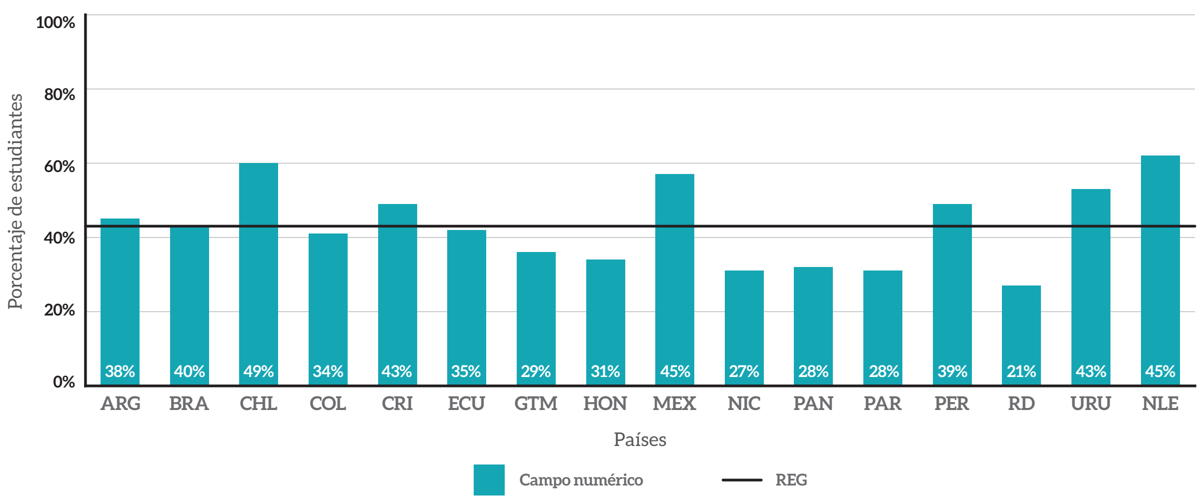


**Gráfico 14:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Geometría en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.

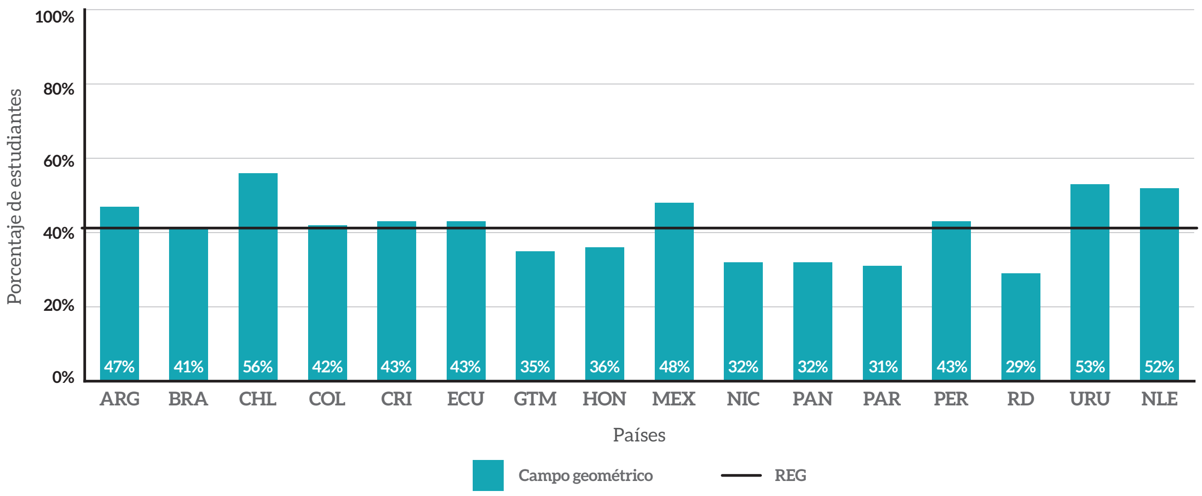



**Gráfico 15:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio de la Medición en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.

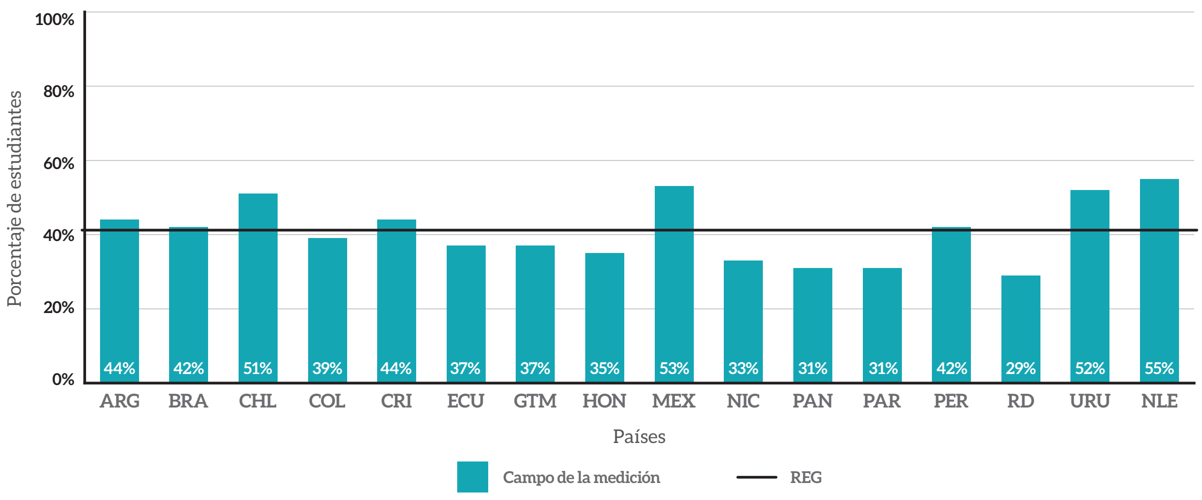



**Gráfico 16:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Estadístico en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.

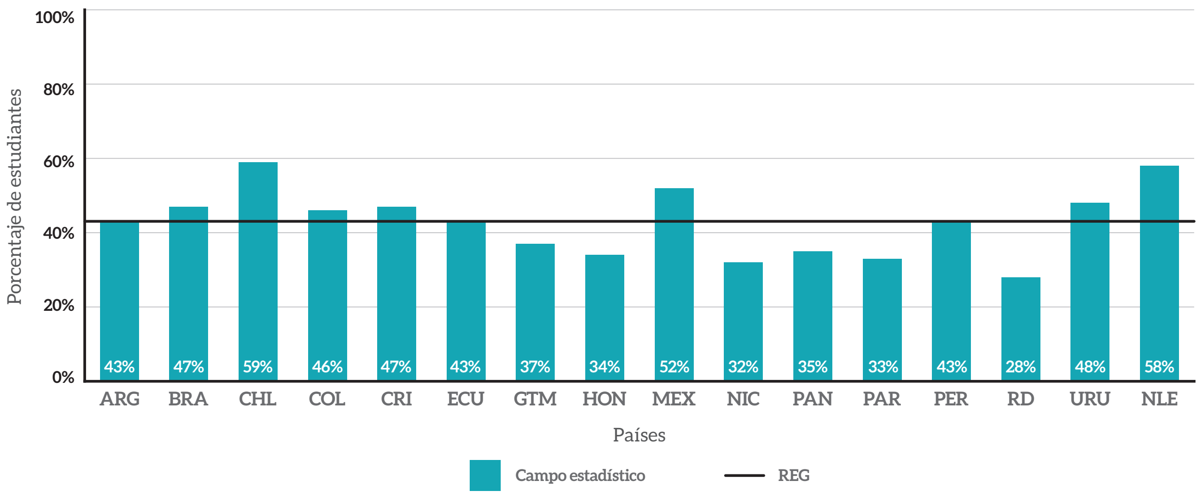
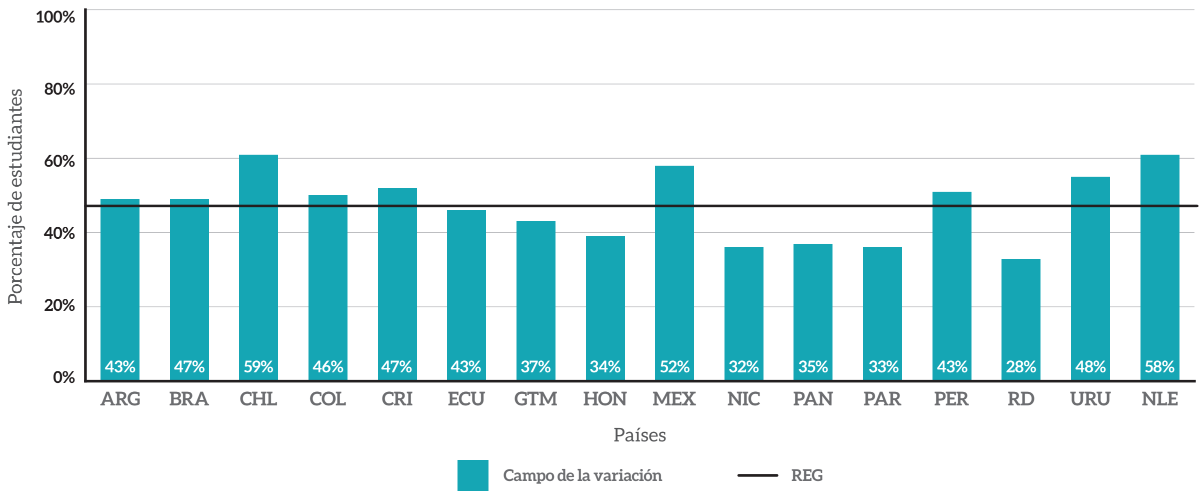


**Gráfico 17:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems del dominio Variación en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.




## Resultados según proceso cognitivo

Los siguientes tres gráficos (18, 19 y 20) muestran el porcentaje de estudiantes de cada país que responde correctamente los ítems asociados a cada proceso cognitivo de la prueba.

En los resultados se aprecia que la mayor heterogeneidad entre países se da en el Reconocimiento de objetos y elementos, donde el porcentaje de estudiantes que responde correctamente los ítems varía entre 39% y 73%, mientras que la Resolución de problemas complejos tiene un rendimiento más homogéneo entre los países de la región (con porcentajes de estudiantes que responde correctamente los ítems que oscilan entre 24% y 48%).

**Gráfico 18:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems referidas a la habilidad de Reconocimiento de objetos y elementos en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.

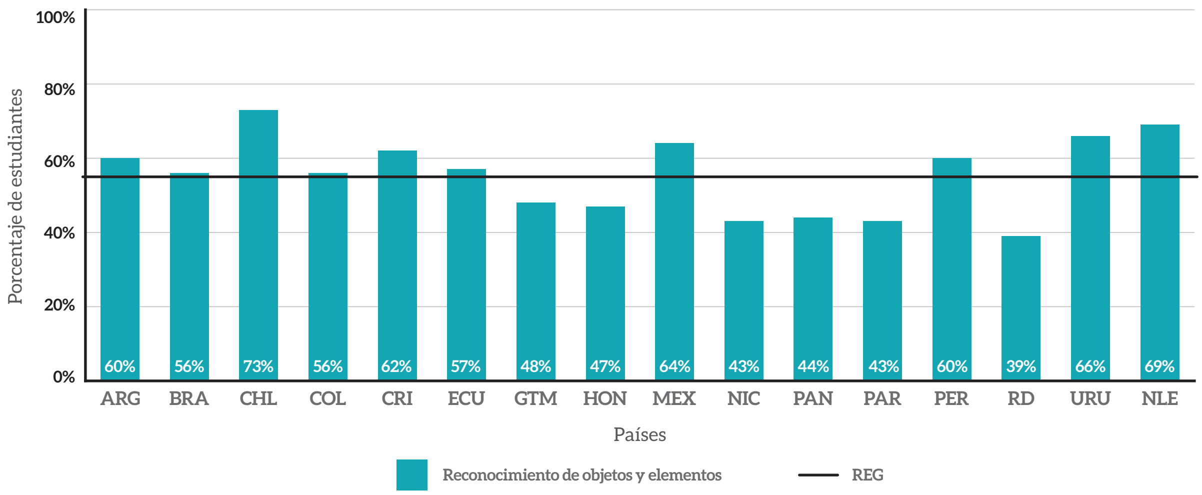


**Gráfico 19:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems referidas a la habilidad de Resolución de problemas simples en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.

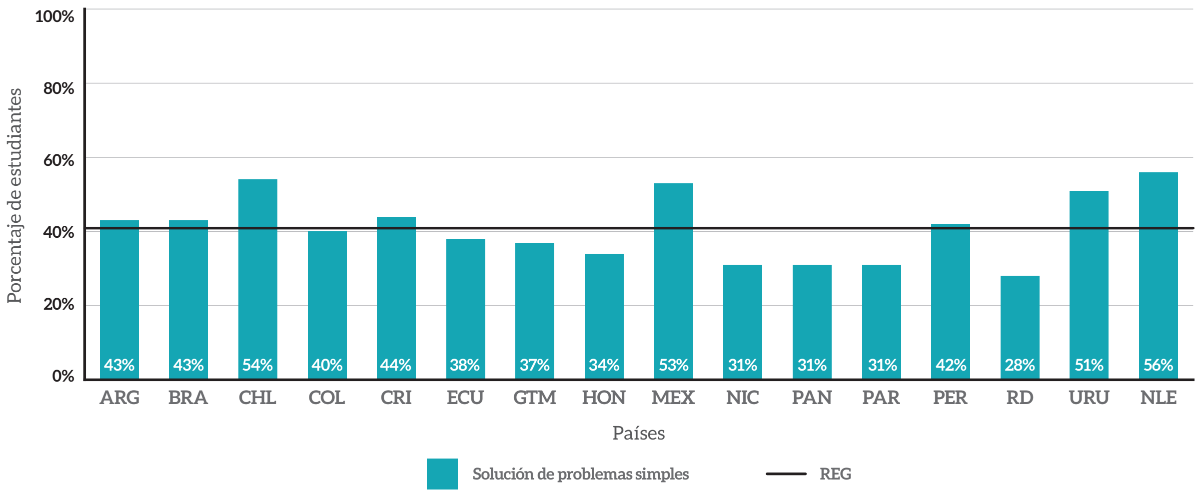
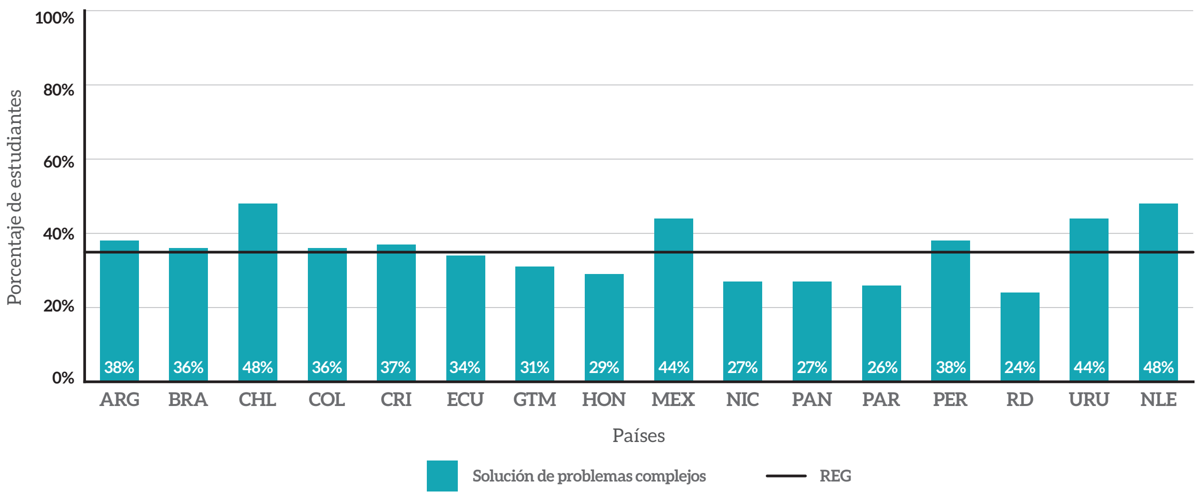



**Gráfico 20:** Porcentaje de estudiantes de cada país que respondió correctamente los ítems referidas a la habilidad de Resolución de problemas complejos en la prueba TERCE de sexto grado, comparados con la media regional.



# La enseñanza y la evaluación de la matemática

## Enfoque de enseñanza de la disciplina en la región

En la actualidad, resulta inconcebible no incluir la formación matemática dentro de las competencias básicas que toda persona debe adquirir para enfrentar los desafíos de la vida en sociedad. Una cotidianidad cada vez más compleja, con mayores volúmenes de información disponibles para una creciente cantidad de personas y con más interconexiones entre los distintos ámbitos de la actividad y el conocimiento humano, pone exigencias también cada vez mayores sobre la enseñanza de la matemática. Porque, ¿qué es la matemática si no el desarrollo organizado y consciente de la natural capacidad humana de detectar, examinar, utilizar patrones, resolver problemas y encontrar orden dentro de lo que a primera vista resulta caótico?

El análisis curricular realizado para fundamentar los dominios evaluados en el TERCE (OREALC/UNESCO Santiago, 2013) permite, además, identificar cómo esas exigencias han permeado los documentos curriculares de la disciplina en América Latina y el Caribe. Muchos de ellos mencionan explícitamente los objetivos de formar ciudadanos autónomos, personas capaces de razonar creativa y críticamente, participantes activos de la sociedad, que comprenden tanto la realidad como su propia capacidad para modificarla.

Dicho análisis curricular, que comparó y analizó los documentos curriculares de matemática de los países participantes en TERCE y otros insumos (como textos escolares), también permite reconocer como eje central de la formación matemática el desarrollo de la capacidad de resolver problemas. La resolución de problemas supone poner en juego todas las habilidades del pensamiento de los estudiantes y relaciona fuertemente el conocimiento matemático adquirido en el ámbito escolar con la vida cotidiana. De este modo, la matemática escolar no es entendida como un fin en sí misma, sino que se perfila como un medio para lograr los objetivos más transversales: formar personas capaces de razonar lógicamente y de pensar críticamente, que dominan ciertos saberes o contenidos propios de esta disciplina, pero que además son capaces de aplicarlos en la vida cotidiana. Así, la matemática escolar se enfoca en privilegiar su aspecto formativo.

### ¿Qué se enseña en matemática?

En la dimensión disciplinar del análisis curricular del TERCE, que recoge todo aquello que es objeto propio de la enseñanza de la matemática, se devela que el enfoque constructivista es compartido por la mayoría de los países participantes. Las distintas orientaciones curriculares organizan los contenidos de manera progresiva y fomentan el desarrollo de experiencias significativas de aprendizaje que serán insumos en niveles posteriores, reconociendo e incorporando la concepción de la matemática como una creación de la mente humana, en la que solo tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos (Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia, 1998, p. 11).

Desde una mirada disciplinar, la enseñanza de la matemática en los países de la región tiene como enfoques generales: la resolución de problemas, la aplicación de los conocimientos matemáticos a situaciones cotidianas y el desarrollo de la capacidad de argumentar y comunicar los resultados obtenidos (OREALC/UNESCO Santiago, 2013). Estos enfoques generales se relacionan estrechamente con la concepción del quehacer matemático inserto en un contexto social y con una relación constante con otras áreas del conocimiento.

Los contenidos fundamentales inherentes al trabajo matemático, contextualizados en el ámbito escolar, tienen pocas variaciones de país en país, y los dominios definidos para del TERCE (ver segundo apartado de este informe) organizan los contenidos de tercer y sexto grados, cubiertos por la mayoría de los participantes, en cinco áreas: números, geometría, medición, tratamiento de la información y análisis variacional.

## ¿Para qué se enseña matemática?

La alta convergencia de los países de la región, tanto en la selección de contenidos como en los enfoques centrales con que estos contenidos se tratan, evidencia una concepción similar en cuanto a cuáles son los objetivos que se busca cumplir con la enseñanza escolar de la matemática y cuáles son las habilidades que se desea desarrollar en los estudiantes (OREALC/UNESCO Santiago, 2013).

El aprendizaje matemático deseado va más allá de adquirir un conjunto aislado de conceptos, hechos, habilidades y procesos. En este sentido, el desafío del docente es promover instancias en las que los estudiantes puedan experimentar de forma activa la aplicación de tales conceptos, hechos, habilidades y procesos (Peng Yee, 2014). El foco en la resolución de problemas no es solo una herramienta de práctica de procedimientos, sino que debe transformarse en el modo central de relacionar el trabajo matemático con la vida cotidiana. El docente debería contextualizar los contenidos mediante problemas reales, relacionando la matemática de la forma más natural posible con situaciones significativas, contextualizadas o no.

La resolución de problemas da la posibilidad a los estudiantes de enfrentarse a situaciones desafiantes que requieren para su solución variadas habilidades, destrezas y conocimientos que no siguen esquemas fijos. Estas incluyen el cálculo numérico escrito y mental, las nociones espaciales, el análisis de datos, el uso de herramientas matemáticas y las estimaciones, entre otras. Nuevamente, se explicita la relevancia del rol que cumple el docente: otorgar a los estudiantes instancias para poner en práctica estas habilidades y, al mismo tiempo, brindarles experiencias que los ayuden a comprender que la matemática es más que una aplicación automática de una cantidad finita de procedimientos (Peng Yee, 2014).

En los procesos definidos para las pruebas TERCE de matemática se hace una distinción entre la resolución de problemas simples y la resolución de problemas complejos. Mientras que los problemas simples requieren el uso de información matemática que está explícita en el enunciado, referida a una sola variable, y el establecimiento de relaciones directas para llegar a la solución; los problemas complejos exigen procesos cognitivos de nivel superior, como la reorganización de la información matemática presentada en el enunciado y la estructuración de una propuesta de solución a partir de relaciones no explícitas, en las que se involucra más de una variable. La consideración de ambos tipos de problemas revela la intención de que los estudiantes sean capaces de:

- Adquirir los conceptos y habilidades matemáticas necesarias para la vida diaria y para el aprendizaje continuo de la matemática y de disciplinas relacionadas.

- Desarrollar habilidades de resolución de problemas y razonamiento matemático, y aplicar estas habilidades para formular y resolver problemas.

- Reconocer y utilizar los vínculos que existen entre las ideas matemáticas, y entre la matemática y otras disciplinas.

- Adoptar una actitud positiva frente a la matemática (Peng Yee, 2014, p.21).

En términos más amplios, se busca preparar personas para enfrentar las condiciones impuestas por la globalización, desarrollar habilidades que les permitan adaptarse a los cambios de una sociedad compleja, generar competencias para ser permeable a estos cambios, para poder construir y fundamentar ideas propias, y para ser parte de la cultura de la comprensión, del análisis crítico y de la reflexión.

## ¿Cómo se enseña matemática?

Aun cuando el propósito del análisis curricular del TERCE se aleja de las tendencias en la enseñanza de la disciplina, es posible desprender algunas de las concepciones teóricas comunes que pueden estar en la base de la manera en que se enseña matemática en América Latina y el Caribe.

En la dimensión pedagógica de dicho análisis, se identifica el predominio de los enfoques cognitivo/sociocultural y constructivista, los que consideran las etapas de desarrollo del estudiante, dándole protagonismo en el proceso de aprendizaje, tomando en cuenta su conocimiento previo y su contexto sociocultural (OREALC/UNESCO Santiago, 2013).

El enfoque cognitivo/sociocultural prioriza el cumplimiento de objetivos de aprendizaje alineados con la necesidad de que los estudiantes desarrollen ciertas capacidades, habilidades, valores y actitudes que sirven para la vida. Bajo este enfoque, el docente es un intermediario entre el estudiante y la cultura social e institucional, es un mediador del aprendizaje.

El enfoque constructivista se refiere principalmente a cómo los estudiantes son capaces de construir nuevos significados a partir de las estructuras mentales y los conocimientos que ya poseen. Desde esta óptica, en el proceso de enseñanza se consideran las ideas previas que los estudiantes tienen del nuevo objeto de aprendizaje y se fomenta la participación de ellos en su propio aprendizaje. Nuevamente, el rol del docente se entiende como un mediador del aprendizaje, pues guía la participación y el razonamiento de los estudiantes a través de actividades y preguntas diseñadas previamente (Calero, 2009).

Las corrientes de enseñanza observadas en la región parecen responder a las exigencias que en la actualidad se le hacen a la formación escolar y se alinean con las tendencias mundiales. De hecho, según las conclusiones del proyecto DESECO (Definición y Selección de Competencias) de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), el constructivismo es el enfoque educativo que mejor se adapta a los procesos de construcción de las competencias clave en la sociedad actual (Serrano y Pons, 2011).

Los documentos curriculares de los distintos países orientan el trabajo docente en las aulas mediante la declaración de esos dos enfoques (constructivista y cognitivo/sociocultural). Y con esto, implícitamente, entregan gran relevancia al rol del profesor en la relación pedagógica: su incidencia en el logro de los objetivos es total; el lugar de los docentes no es el centro del sistema educativo sino su base, los profesores concretan día a día lo que, para ellos, es más eficiente en el ámbito educativo.

En términos concretos, al menos a nivel de las orientaciones curriculares y desde una perspectiva constructivista (Calero, 2009), se espera que los docentes de matemática de la región sean capaces de:

- Planificar la enseñanza, considerando las características y los intereses particulares de los estudiantes, y reflexionar en torno a ella tanto previa como posteriormente a la ejecución de esas planificaciones.

- Desarrollar actividades didácticas que se centren en el quehacer del estudiante, cuidando que sean suficientemente desafiantes, pero no frustrantemente imposibles.

- Usar el conocimiento intuitivo o previo en el desarrollo de las actividades didácticas.

- Fomentar la participación de los estudiantes en clase, dando oportunidades para la reflexión y expresión de opiniones e ideas. Crear instancias en donde los estudiantes puedan verbalizar sus modelos mentales y contrastarlos con los de los demás.

- Relacionar el contenido con situaciones cotidianas y significativas para los estudiantes.

- Generar climas de confianza para que los estudiantes no teman dar una respuesta errónea, enfatizando que el conocimiento se construye corrigiendo errores y que el único error real "es pensar que la certeza existe, que la verdad es absoluta, que el conocimiento es permanente" (Moreira, 2005, p. 94).

- Ayudar a solucionar las dificultades que entrampan el desarrollo de las actividades propuestas, sin dar las respuestas, sino que entregando las herramientas u orientaciones para continuar.

- Brindar espacios para la experimentación y la creatividad.

## Evaluación y promoción del aprendizaje

Tradicionalmente, se asocia la evaluación con la idea de calificación o puntaje. Los sistemas escolares formales requieren de calificaciones que permitan determinar e informar de manera objetiva cuál es el rendimiento académico de un estudiante respecto de otros (función normativa de la evaluación), concluyendo quiénes son los que pasan de un nivel a otro a partir de la certificación de un mínimo de aprendizajes (función certificadora de la evaluación). Por otro lado, ¿qué pasaría si la certificación de los aprendizajes de las asignaturas no estuviera asociada a un número? ¿Cuál sería la actitud de los estudiantes frente a actividades no calificadas? De acuerdo a su edad, la predisposición de los niños y jóvenes podría tornarse poco seria. La inmadurez de algunos estudiantes les impediría comprender que las tareas escolares (trabajos escritos, disertaciones, guías de contenido, guías de ejercitación, pruebas, etcétera) son parte del proceso enseñanza/aprendizaje y están diseñadas en función del logro de los objetivos propuestos. Por tanto, la evaluación se usa, también, como una fuente de control externo de la conducta de los estudiantes.

A las funciones tradicionales descritas anteriormente, se suma la función pedagógica de la evaluación como uno de los aspectos centrales de una práctica docente que fomente el logro de aprendizajes significativos en los estudiantes. En este enfoque, es fundamental separar conceptualmente la evaluación de la medición de los aprendizajes a los que refieren los usos anteriores de la evaluación. La medición debe ser un insumo más para la evaluación en el aula, entendiendo evaluación como el uso de los resultados de la medición para tomar decisiones pedagógicas, tales como modificar prácticas en la enseñanza o dar cierto tipo de retroalimentaciones. Para que el proceso evaluativo promueva el aprendizaje, la calificación no debe ser la única información que se entregue a los estudiantes.

¿Qué significa que un estudiante obtenga la máxima calificación en una prueba de matemática? ¿Aprendió más que el resto de los estudiantes que no obtuvieron esa calificación máxima? Y si fue así, ¿qué o cuánto más? A partir de la calificación, ¿el estudiante puede saber qué le faltó por lograr para llegar a cumplir los objetivos de aprendizaje?

Para que la evaluación realmente promueva el logro de los objetivos planteados es necesario concebirla como parte del proceso enseñanza/aprendizaje, garantizando que sea coherente con los objetivos de aprendizaje propuestos y con las metodologías de enseñanza implementadas en función de estos objetivos.

En la práctica, el docente debe involucrar a los estudiantes en su propia evaluación, especificando qué se espera que aprendan en cada clase, y entregándoles, antes de aplicar un instrumento de evaluación, los logros de aprendizaje esperados y no solamente una lista de los contenidos. De esta manera, los estudiantes conocerán a priori qué se espera que hagan de manera concreta, orientando su estudio y enfocándolos en el logro de "mini-metas" que aportan en el cumplimiento de la meta final, que son los objetivos de aprendizaje. Además, se debe cuidar que los instrumentos de evaluación empleados estén alineados con los contenidos y habilidades desarrollados durante las clases, pues se debe medir lo que efectivamente se enseñó. Por ejemplo, si en el aula solo se resolvieron problemas que exigen aplicar directamente un cierto procedimiento, no es razonable incluir en el instrumento de evaluación problemas "no rutinarios", que requieran poner en juego adaptaciones mayores de los procedimientos trabajados en el aula. Pues, ¿cómo se esperaría que los estudiantes logren hacer un análisis para producir tales adaptaciones si nunca se les dieron oportunidades para aprender a hacerlo?

Los resultados del instrumento de evaluación, además de asociarse a una calificación, deben ser contrastados con el contexto en que se realizó la evaluación, reflexionando acerca de la enseñanza y de todas las variables que pudieron haber influido en los resultados obtenidos. ¿Cuáles son los objetivos menos logrados? ¿Por qué? ¿Qué estrategias se usaron para orientar la enseñanza hacia el logro de esos objetivos? ¿De qué manera se podría mejorar la enseñanza orientada hacia el logro de esos objetivos? ¿Qué variables externas podrían haber influido? ¿Qué instancias de retroalimentación se pueden ofrecer a los estudiantes para que interpreten y analicen sus resultados en la medición?

En respuesta a la última pregunta, si el docente ha dado a conocer a sus estudiantes los logros de aprendizaje esperados antes de aplicar el instrumento de evaluación, la retroalimentación podría ser más precisa, ya que para los estudiantes podría ser más simple identificar y comprender qué necesitan para mejorar su desempeño, para alcanzar los logros esperados. Una buena retroalimentación debe clarificar qué aspectos fueron logrados y cuáles no, para generar en el estudiante una reflexión sobre el origen de sus errores y producir, luego, un plan de acción que le permitan mejorar los aspectos deficitarios. La evaluación, como parte integral del proceso enseñanza aprendizaje, debe ser un insumo para el logro de aprendizajes significativos. En matemática es usual la implementación de algoritmos o reglas que en algunas ocasiones se incorporan de manera memorística, sin comprender de dónde vienen o qué significan. Esos métodos no suelen dar lugar a aprendizajes significativos. Si olvida una parte del algoritmo, el estudiante no será capaz de reconstruirlo porque no lo entiende. El aprendizaje significativo se logrará cuando se produzcan interacciones entre los conocimientos previos y los nuevos: mientras los conocimientos recientes adquieren significado para el aprendiz por lo que ya conocía, los conocimientos previos se completan, se enriquecen, se reelaboran sus significados y se estabilizan. Así, el conocimiento previo es, de forma aislada, la variable que más influye en el aprendizaje. En última instancia, solo se puede aprender a partir de aquello que ya se conoce (Moreira, 2005).

Moreira (2005) también plantea algunas ideas relevantes para facilitar el aprendizaje significativo crítico, como son:

- Utilizar la interacción social o significados compartidos entre el profesor y el estudiante, colocando énfasis en la formulación e intercambio de preguntas **no triviales** sobre el contenido.

- Utilizar recursos pedagógicos diversos

- Enseñar considerando las experiencias previas de los educandos, sin olvidar que cada cual tiene su propia percepción de las cosas y, por tanto, pueden generar representaciones diferentes.

- Utilizar el lenguaje con precisión, en particular, el de la disciplina, teniendo conciencia en el uso de las palabras y su significado, el cual no siempre es el mismo para todas las personas.

- Aprovechar el error como medio de aprendizaje.

- Generar capacidad de *desaprendizaje* en los casos en que ciertos conocimientos previos no permitan aprender los nuevos conocimientos.

- Actuar conscientes de la incertidumbre de todo conocimiento, el cual se construye a partir de las definiciones dadas, las metáforas utilizadas y las preguntas formuladas a los estudiantes.

Hasta ahora se ha relacionado de manera general la evaluación y el aprendizaje en el contexto escolar, siendo la primera un insumo para lograr lo segundo, siempre y cuando se trabaje desde la perspectiva de la evaluación para la promoción del aprendizaje y no simplemente como una evaluación del aprendizaje. En términos específicos, en el contexto de las pruebas de matemática del TERCE, el análisis curricular del estudio concluyó que el enfoque evaluativo en los países participantes tiende a considerar importante la evaluación de competencias, contenidos y habilidades; asimismo, la mayoría de los países considera que la evaluación debe desarrollarse de manera permanente y con carácter formativo, por lo que se da importancia a valorar el proceso del estudiante y su retroalimentación (OREALC/UNESCO, 2013). Elementos relevantes de la concepción de la evaluación para la promoción del aprendizaje están en la base del desarrollo del estudio.

Las convergencias entre los enfoques evaluativos de los países participantes que fueron usados como guía durante el proceso de diseño y elaboración de las pruebas de matemática del TERCE, pueden sintetizarse en los siguientes puntos:

- Consideración de los conocimientos previos y la relación del conocimiento adquirido con situaciones cotidianas.

- La resolución de problemas como eje central del aprendizaje.

- Contemplación de la matemática como una disciplina integral, en interacción con otras áreas del conocimiento, y no como una asignatura con contenidos aislados.

- El desarrollo de destrezas y habilidades propias del área matemática como parte importante del proceso de construcción del conocimiento.

- El pensamiento crítico y el razonamiento lógico tomados en consideración en el proceso de enseñanza aprendizaje.

- Evaluación de los contenidos, seguido por las competencias y habilidades, comunes en los currículos (OREALC/UNESCO, 2013).

Los resultados de estas pruebas entregan una gran cantidad de datos que nutren con información estadística a diversos actores educativos; pero, para que estas mediciones cobren relevancia en el trabajo en el aula, es importante el juicio experto que esos actores puedan dar sobre el objeto de estudio. Los resultados de las pruebas de matemática del TERCE son un insumo más para reflexionar en torno a las prácticas pedagógicas en el aula. En el siguiente capítulo se consideran resultados de preguntas específicas incluidas en las pruebas del TERCE y se hacen sugerencias de intervenciones pedagógicas. Estas buscan ser un punto de partida para que los profesores de los países participantes pueden realizar procesos de reflexión sobre su labor, hacerse preguntas, levantar hipótesis y tomar decisiones pertinentes para mejorar los aprendizajes de sus estudiantes, considerando además las variables contextuales en sus escuelas.

# Resultados de los estudiantes y alternativas para el trabajo docente

A continuación se presenta una serie de preguntas que fueron incluidas en la prueba TERCE 2013, en este momento liberadas para su conocimiento público. El propósito de incorporarlas en este documento es mostrar de modo más evidente cómo las definiciones expresadas en los niveles de desempeño de matemática en el TERCE se manifiestan a través de preguntas. Esta muestra permite conocer en qué consisten, el nivel de dificultad que implican y, los contextos y tareas a los que se vieron expuestos los estudiantes para evaluar sus logros de aprendizaje en esta área disciplinaria.

Dar a conocer las preguntas busca también que los profesores, y quienes están relacionados con la formación y educación de los niños y jóvenes, conozcan cuáles son las exigencias que el Tercer Estudio Regional consideró en el área de la matemática. Se espera así que este material les ayude en su quehacer cotidiano.

Previo a la presentación de los ítems que caracterizan los niveles de desempeño de la prueba, se hace una descripción del proceso a través del cual se establecieron los puntos de corte que dan lugar a los niveles y se muestran los aprendizajes propios de cada uno de ellos.

## Niveles de desempeño en las pruebas de matemática

Para conocer la distribución de estudiantes según niveles de desempeño, primero es necesario establecer los 'puntos de corte' que definen la transición de un nivel a otro. Esta tarea implica que un grupo de personas emita un juicio experto para determinar cuánto es lo mínimo que se debe responder en una prueba para alcanzar un determinado nivel de desempeño. Dicho juicio es regulado por un conjunto de procedimientos estandarizados que permiten objetivar el proceso.

Para establecer los puntajes de corte de las pruebas del TERCE se empleó el método de Bookmark. Esta metodología es una de la más empleadas a nivel internacional para establecer niveles de desempeño en pruebas estandarizadas (Cizek & Bunch, 2007; Mitzel et al., 2001). En el método Bookmark, expertos y profesionales comprometidos con el área evaluada trabajan con un cuadernillo que contiene las preguntas de la prueba ordenadas según su dificultad empírica, desde la más fácil a la más difícil. El trabajo de los jueces consistió en revisar las preguntas así ordenadas y seleccionar la primera que, en su opinión, un sujeto límite (aquel que está en el borde inferior de la categoría de desempeño cuyo puntaje de corte se está definiendo) tendría mayor probabilidad de responder correctamente.

Esta decisión individual fue luego discutida en pequeños grupos donde se dio a conocer el juicio de los demás participantes y donde, al término de la discusión e intercambio de opiniones, cada juez tuvo la posibilidad de volver a establecer su punto de corte. Finalmente, hubo una sesión plenaria, en que cada grupo expuso sus argumentos y puntos de corte, se entregaron datos de impacto de los puntos de corte propuestos y se dio la oportunidad para que cada juez, en forma individual, manifestara nuevamente su decisión (Cizek & Bunch, 2007; Zieky, Perie, & Livingston, 2006). En estas dos rondas de trabajo (grupos pequeños y plenario) se utilizó la mediana de los puntos de corte de cada juez para establecer el punto de corte grupal.

A través de esta metodología se establecieron tres puntos de corte en cada prueba, que dieron lugar a cuatro niveles de desempeño (I, II, III y IV). Estos niveles ordenaron los logros de aprendizaje de los estudiantes en un continuo de creciente complejidad: los logros de los niveles inferiores son la base de los niveles más avanzados.

Una cotidianidad cada vez más compleja, con mayores volúmenes de información disponibles para una creciente cantidad de personas y con más interconexiones entre los distintos ámbitos de la actividad y el conocimiento humano, pone exigencias también cada vez mayores sobre la enseñanza de la matemática.

El siguiente cuadro describe cada uno de los niveles de desempeño, en base a las tareas que los estudiantes mostraron que son capaces de realizar, en tercer grado.

| | |
|---|---|
| **NIVEL I** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Ordenar números naturales y comparar cantidades.<br>● Identificar figuras geométricas básicas.<br>● Identificar elementos faltantes en secuencias simples (gráficas y numéricas).<br>● Leer datos explícitos en tablas y gráficos. |
| **NIVEL II** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Leer y escribir números naturales.<br>● Interpretar fracciones simples.<br>● Identificar unidades de medida o instrumentos más adecuados para medir atributos de un objeto conocido.<br>● Identificar posiciones relativas de objetos en mapas.<br>● Identificar elementos en figuras geométricas o representaciones planas de cuerpos geométricos.<br>● Extraer información entregada en tablas y gráficos. |
| **NIVEL III** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Identificar reglas o patrones de formación de secuencias más complejas (gráficas y numéricas), determinar elementos que faltan o continuar las secuencias.<br>● Resolver problemas que involucran los elementos de figuras geométricas o representaciones planas de cuerpos geométricos.<br>● Resolver problemas que requieren interpretar fracciones simples.<br>● Resolver problemas que requieren aplicar las operaciones de números naturales.<br>● Comparar y estimar medidas de objetos, y resolver problemas que involucran medidas.<br>● Interpretar información presentada en tablas y gráficos. |
| **NIVEL IV** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Resolver problemas más complejos en el ámbito de los números naturales.<br>● Resolver problemas que involucran la comparación y conversión de medidas.<br>● Resolver problemas más complejos que involucran los elementos de figuras geométricas o representaciones planas de cuerpos geométricos. |

En el siguiente cuadro se describen los aprendizajes de los estudiantes de sexto grado evaluados en el TERCE en cada uno de los cuatro niveles de desempeño.

| | |
|---|---|
| **NIVEL I** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Estimar pesos (masas) y longitudes de objetos.<br>● Identificar posiciones relativas en mapas.<br>● Identificar reglas o patrones de formación de secuencias numéricas simples y continuarlas.<br>● Ordenar números naturales y decimales.<br>● Utilizar la estructura del sistema decimal y de sistemas monetarios.<br>● Resolver problemas simples que involucran variaciones proporcionales.<br>● Leer datos explícitos en tablas y gráficos. |
| **NIVEL II** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Resolver problemas simples que involucran números naturales, números decimales y fracciones, y variaciones proporcionales.<br>● Relacionar distintas vistas espaciales.<br>● Determinar términos faltantes o continuar secuencias gráficas o numéricas.<br>● Identificar ángulos agudos, rectos y obtusos, y resolver problemas simples que involucran ángulos.<br>● Determinar medidas de longitud o masa de objetos, mediante instrumentos graduados.<br>● Calcular perímetros y áreas de polígonos. |
| **NIVEL III** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Resolver problemas de variaciones proporcionales, que requieren interpretar la información entregada.<br>● Convertir unidades de medidas y resolver problemas que involucren medidas.<br>● Resolver problemas que involucren ángulos e identificar relaciones de perpendicularidad y paralelismo en el plano.<br>● Interpretar patrones de formación de secuencias numéricas.<br>● Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de polígonos.<br>● Resolver problemas que requieren leer e interpretar información de tablas y gráficos. |
| **NIVEL IV** | Estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:<br>● Resolver problemas más complejos que involucran operaciones de números naturales, números decimales y fracciones, o variaciones proporcionales.<br>● Resolver problemas más complejos que involucren el cálculo de perímetros y áreas de polígonos, o ángulos de polígonos.<br>● Resolver problemas que requieren convertir unidades de medidas.<br>● Resolver problemas que requieren interpretar datos presentados en tablas o gráficos más complejos. |

## Ejemplos de preguntas de los distintos niveles de desempeño

## Ejemplos de preguntas de los niveles de desempeño de tercer grado[2]

**NIVEL I**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Ordenar números naturales y comparar cantidades.
- Identificar figuras geométricas básicas.
- **Identificar elementos faltantes en secuencias simples (gráficas y numéricas).**
- Leer datos explícitos en tablas y gráficos.

Observa la secuencia:

2 6 0 5 2 6 0 5 2 $\boxed{\phantom{0}}$ 0 5 2 6 0 5

Si se mantiene el patrón, ¿qué número se ubica en el $\boxed{\phantom{0}}$ ?

**A)** 0

**B)** 2

**C)** 5

**D)** 6

M3V1262C

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| D | 5% | 9% | 9% | 70% | 6% |

Este ítem requiere que el estudiante identifique el término faltante en la secuencia numérica que se le presenta en el enunciado. Para cumplir con esta tarea, debe reconocer que la secuencia sigue un patrón de repetición con una longitud de cuatro términos y, luego, debe detectar cuál es el término faltante usando el término anterior o el siguiente como referente.

Las opciones corresponden a los cuatro números que conforman la secuencia, por

[2] *En los cuadros que presentan cada pregunta, los porcentajes de elección por opción y el porcentaje de respuestas omitidas han sido redondeados al entero, por tanto, podrían no sumar 100%.*

lo que se asume que la detección del patrón repetitivo será realizada por la gran mayoría de los estudiantes. Los pocos estudiantes que, al responder la pregunta, seleccionaron alguno de los distractores, probablemente no fueron capaces de usar los demás números entregados como referentes, es decir, no lograron identificar las relaciones entre los términos de la secuencia.

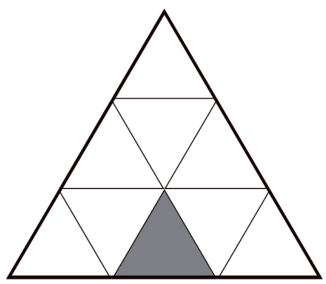
Usualmente, las secuencias numéricas que se trabajan con los estudiantes de este grado son sucesiones aritméticas (cuyos términos se obtienen del anterior sumando una cantidad constante), sin embargo, sucesiones geométricas (o gráficas) y numéricas de repetición, como la del ejemplo, pueden ser usadas para detectar patrones o reglas de formación que no se relacionan necesariamente con el sistema de numeración decimal y sus regularidades.

**NIVEL II**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Leer y escribir números naturales.
- **Interpretar fracciones simples.**
- Identificar unidades de medida o instrumentos más adecuados para medir atributos de un objeto conocido.
- Identificar posiciones relativas de objetos en mapas.
- Identificar elementos en figuras geométricas o representaciones planas de cuerpos geométricos.
- Extraer información entregada en tablas y gráficos.

La siguiente figura se dividió en partes iguales:



¿Qué fracción de la figura grande representa la figura pintada?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{1}{10}$

| Respuesta correcta: | Porcentaje elección opción A: | Porcentaje elección opción B: | Porcentaje elección opción C: | Porcentaje elección opción D: | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 23% | 10% | 53% | 10% | 5% |

Esta pregunta exige que el estudiante identifique la fracción que representa el triángulo pintado de color gris respecto del triángulo grande que conforma el entero y que se ha dividido en partes iguales. Por tanto, el estudiante debe reconocer que el triángulo grande se ha dividido en nueve partes iguales y que una de esas partes, la gris, corresponde a $\frac{1}{9}$ del entero.

Los distractores se refieren a interpretaciones incorrectas de la información entregada en la figura (opciones A y B) o a un mal conteo de las partes en que se ha dividido el entero (opción D).

Llama la atención la alta elección del distractor A, que duplica la elección de los otros dos distractores. Esto podría adjudicarse al hecho de que tanto el entero como las partes iguales en las que este se dividió son triángulos, figura geométrica que está fuertemente relacionada con el número 3; o bien, al hecho de que la base del triángulo mayor queda dividido en tres partes iguales, una de las cuales corresponde a la base del triángulo gris.

Como se analizará más adelante, la representación e interpretación de fracciones y números decimales es un tema que tradicionalmente resulta complejo para los estudiantes desde el comienzo; incluso, años después de trabajar con este tipo de números, sigue siendo un aprendizaje difícil de consolidar.

**NIVEL III**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Identificar reglas o patrones de formación de secuencias más complejas (gráficas y numéricas), determinar elementos que faltan o continuar las secuencias.
- Resolver problemas que involucran los elementos de figuras geométricas o representaciones planas de cuerpos geométricos.
- Resolver problemas que requieren interpretar fracciones simples.
- **Resolver problemas que requieren aplicar las operaciones de números naturales.**
- Comparar y estimar medidas de objetos, y resolver problemas que involucran medidas.
- Interpretar información presentada en tablas y gráficos.

Matías visitó una fábrica donde (arman / ensamblan) 24 juguetes por hora. ¿Cuántos (armarán / ensamblarán) en 2 horas si se continúa con el mismo ritmo de trabajo?

**A)** 12 juguetes.

**B)** 24 juguetes.

**C)** 26 juguetes.

**D)** 48 juguetes.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| D | 10% | 18% | 17% | 48% | 6% |

Para resolver este problema, el estudiante debe interpretar la información entregada en el enunciado sobre la cantidad de juguetes que la fábrica produce en una hora (24 juguetes), reconocer una estrategia de resolución que le permita calcular la producción de dicha fábrica en dos horas (por ejemplo, 24·2, o bien, 24+24) y ejecutar esa estrategia correctamente. Los distractores se relacionan con otras posibles operaciones aritméticas que pueden realizarse con los números del enunciado (opciones A y C) y con una comprensión errónea de los datos o de la pregunta, que podría llevar a la opción B.

Otra posible fuente de errores en las preguntas que exigen resolver problemas usando operaciones aritméticas corresponde a los errores de cálculo. Sin embargo, esos errores suelen relacionarse más bien con la falta de práctica en la ejecución de los algoritmos que con las capacidades de los estudiantes para interpretar información y desarrollar estrategias de resolución. En esta pregunta se privilegió la observación de esas competencias al evaluar la resolución de problemas. Como no se incluyeron errores de cálculo entre los distractores, un estudiante que relacionó correctamente los datos y desarrolló una estrategia de resolución exitosa, es capaz de darse cuenta si comete un error de cálculo y enmendar el rumbo, porque no encontrará su respuesta errónea entre las opciones.

**NIVEL IV**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Resolver problemas más complejos en el ámbito de los números naturales.
- **Resolver problemas que involucran la comparación y conversión de medidas.**
- Resolver problemas más complejos que involucran los elementos de figuras geométricas o representaciones planas de cuerpos geométricos.

En una balanza, se pesan 4 trozos de queso. Cada trozo pesa 100 gramos. ¿Cuántos trozos de queso de 100 gramos faltan para completar 1 kilogramo?


**A)** 4

**B)** 6

**C)** 100

**D)** 600

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 20% | 27% | 24% | 25% | 3% |

Este ítem requiere que el estudiante interprete los datos entregados en el enunciado, plantee una estrategia de resolución con más de un paso y que involucra una conversión de unidades de medida de peso (masa, en estricto rigor[3]) y, por último, realice sin errores de cálculo las operaciones aritméticas que llevan a resolver el problema.

Los distractores, que resultaron muy populares, aluden a una interpretación errónea de los datos dados en el enunciado (opción C) y a la implementación incompleta de una estrategia de resolución (opciones A y D). O bien, a considerar números que aparecen en el enunciado de la pregunta, sin siquiera comprender el problema planteado (opciones A y C).

La variedad de elementos involucrados en esta pregunta la identifican inequívocamente como un problema complejo, para el cual existen diversas estrategias de resolución, que tienen en común la necesidad de que los estudiantes realicen un análisis que incorpora, simultáneamente, la necesidad de selección de más de una operación aritmética, conocer la conversión 1 kg = 1 000 g y, aplicar dicha conversión correctamente y en el momento adecuado de la resolución.

La práctica de este tipo de problemas en el aula, con la guía del docente, con discusiones analíticas desarrolladas entre pares, tanto sobre la equivalencia de distintas estrategias de resolución como sobre las ventajas y desventajas que cada una presente, son fundamentales para desarrollar la capacidad en los estudiantes para enfrentarse a las situaciones cada vez más complejas a las que se irán viendo expuestos a medida que avanzan en su vida escolar.

---

*[3] En algunos países se enfatiza la diferencia conceptual entre "masa" y "peso" al trabajar los contenidos de unidades de medida en matemática. En otros, en cambio, se usa solo "peso" en las clases de matemática, dejándole a las clases de ciencias la responsabilidad de diferenciar ambos conceptos. En las preguntas incluidas en las pruebas TERCE de matemática se prefirió usar "peso", considerando que en el lenguaje cotidiano de los estudiantes de tercer y sexto grado no se usará muy frecuentemente la palabra "masa" para definir la cantidad de materia de un objeto.*

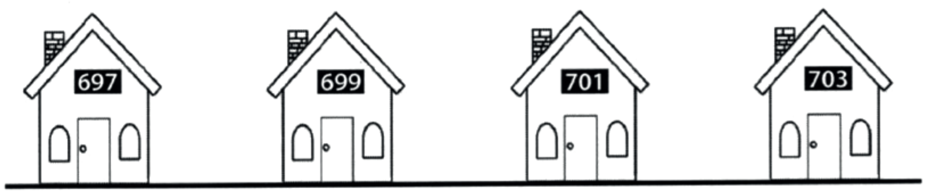
# Ejemplos de preguntas de los niveles de desempeño de sexto grado[4]

**NIVEL I**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Estimar pesos (masas) y longitudes de objetos.
- Identificar posiciones relativas en mapas.
- **Identificar reglas o patrones de formación de secuencias numéricas simples y continuarlas.**
- Ordenar números naturales y decimales.
- Utilizar la estructura del sistema decimal y de sistemas monetarios.
- Resolver problemas simples que involucran variaciones proporcionales.
- Leer datos explícitos en tablas y gráficos.

Observa la numeración de las casas:




¿Cuál es la regla que permite formar la secuencia de números de las casas?

**A)** Sumar 2 al número anterior.

**B)** Restar 9 al número anterior.

**C)** Sumar 100 al número anterior.

**D)** Restar 100 al número anterior.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 75% | 9% | 9% | 3% | 4% |

Para responder esta pregunta, el estudiante debe relacionar la numeración de las casas que se muestran en la imagen con una secuencia numérica y luego, identificar el patrón (o regla de formación) recursivo de esa secuencia, es decir, identificar cómo se obtiene un elemento específico de la secuencia en términos del elemento anterior.

Los distractores aluden a errores que se cometen frecuentemente al realizar adiciones y sustracciones con reserva o canje y también

[4] *En los cuadros que presentan cada pregunta, los porcentajes de elección por opción y el porcentaje de respuestas omitidas han sido redondeados al entero, por tanto, podrían no sumar 100%.*

a confusiones en la detección del patrón que podría generar el cambio de centena en los números de la secuencia entre su segundo y su tercer elemento.

Las sucesiones aritméticas definidas recursivamente suelen ser parte del trabajo en el aula, aunque muchas veces la regla o patrón de formación no es expresado explícitamente de forma recursiva (por ejemplo, agregando la frase "al número anterior" al final de la regla).

La discusión sobre la necesidad de explicitar la recursividad de la regla de formación de una secuencia, junto con la revisión de secuencias numéricas más complejas (por ejemplo, que tengan reglas de formación recursivas de dos pasos o que usen los dos términos anteriores), y la formulación no recursiva de algunas secuencias simples, se plantean como la progresión natural de los contenidos de patrones y preparan el terreno para el tratamiento algebraico de los mismos en los siguientes niveles de escolaridad.

**NIVEL II**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- **Resolver problemas simples que involucran números naturales, números decimales y fracciones.**
- Resolver problemas simples de variaciones proporcionales.
- Relacionar distintas vistas espaciales.
- Determinar términos faltantes o continuar secuencias gráficas o numéricas.
- Identificar ángulos agudos, rectos y obtusos, y resolver problemas simples que involucran ángulos.
- Determinar medidas de longitud o masa de objetos, mediante instrumentos graduados.
- Calcular perímetros y áreas de polígonos.

Para visitar a un amigo, Ignacio debe recorrer 5 kilómetros en bicicleta. Si ha recorrido 2,3 kilómetros, ¿a cuántos kilómetros está de la casa de su amigo?

**A)** 1,8 km.

**B)** 2,2 km.

**C)** 2,7 km.

**D)** 3,3 km.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 12% | 16% | 49% | 19% | 3% |

Este problema requiere que el estudiante interprete los datos dados en el enunciado, seleccione una operación aritmética entre números decimales pertinentes y la ejecute sin errores de cálculo. Los distractores se relacionan con errores en la aplicación del algoritmo de la resta de números decimales (opciones B y D) y en la identificación del orden en que deben restarse las cantidades dadas en el enunciado y en el valor posicional (opción A).

La estrategia de resolución de este problema es directa (por ejemplo, se puede resolver calculando 5 – 2,3), los datos se presentan en orden y la situación es cotidiana. Además, el planteamiento es semejante a numerosos problemas que los estudiantes seguramente han enfrentado a lo largo de su vida escolar en distintos ámbitos numéricos. De ahí que, evidentemente, se trate de un problema simple. Sin embargo, en sexto grado, la operatoria con números decimales está lejos de estar dominada por la mayoría de los estudiantes, lo que se ve reflejado en la relativamente alta popularidad de los distractores.

**NIVEL III**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Resolver problemas de variaciones proporcionales, que requieren interpretar la información entregada.
- Convertir unidades de medidas y resolver problemas que involucren medidas.
- Resolver problemas que involucren ángulos e identificar relaciones de perpendicularidad y paralelismo en el plano.
- Interpretar patrones de formación de secuencias numéricas.
- Resolver problemas que involucren el cálculo de perímetros y áreas de polígonos.
- **Resolver problemas que requieren leer e interpretar información de tablas y gráficos.**

Observa la siguiente tabla que muestra las edades de un grupo de personas:

| Edad (Años cumplidos) | Cantidad de personas |
|---|---|
| 7 a 10 | 6 |
| 11 a 14 | 13 |
| 15 a 18 | 14 |
| 19 a 22 | 8 |
| Más de 23 | 9 |

¿Cuántas personas tienen menos de 15 años?

**A)** 6 **C)** 19

**B)** 14 **D)** 33

| Respuesta correcta: | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 31% | 23% | 40% | 3% | 2% |

Este ítem exige interpretar los datos que se presentan en una tabla para obtener la información requerida. En sexto grado, aún no se han trabajado en el aula tablas con datos organizados por intervalos, por tanto, esta pregunta requerirá que los estudiantes seleccionen los datos que deben usar y construyan una estrategia de resolución, adaptando los métodos que sí conocen para tablas de frecuencia absoluta con datos no agrupados.

Los distractores reflejan errores de interpretación de los datos entregados en relación con la pregunta. Probablemente, la alta popularidad de los distractores A y B se debe a que ambas opciones corresponden a números que se extraen directamente de la tabla. Acción que suele resolver la mayoría de los problemas de estadística a los que se ven enfrentados los estudiantes de los primeros grados.

Para desarrollar progresivamente las competencias de interpretación y análisis de datos que serán requeridas más adelante, los estudiantes deben comenzar a ser expuestos a preguntas estadísticas que puedan ser respondidas agrupando categorías o discriminando aquellas que cumplan con ciertos criterios dados.

**NIVEL IV**

En la prueba TERCE, estos estudiantes muestran evidencia de ser capaces de:

- Resolver problemas más complejos que involucran operaciones de números naturales, números decimales y fracciones, o variaciones proporcionales.
- **Resolver problemas más complejos que involucren el cálculo de perímetros y áreas de polígonos, o ángulos de polígonos.**
- Resolver problemas que requieren convertir unidades de medidas.
- Resolver problemas que requieren interpretar datos presentados en tablas o gráficos más complejos.

La figura muestra un rectángulo y en su interior un triángulo equilátero.

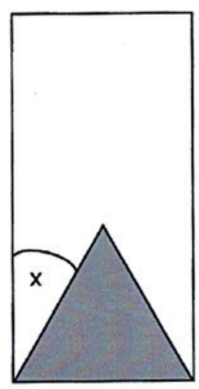
¿Cuánto mide el ángulo x?

A) 15º.

B) 30º.

C) 45º.

D) 90º.




| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 45% | 25% | 15% | 11% | 4% |

Para responder correctamente este ítem, es necesario que el estudiante conozca las medidas de los ángulos interiores de los rectángulos y de los triángulos equiláteros, relacione la medida del ángulo desconocido con esas medidas conocidas, reconociendo ángulos adyacentes y complementarios.

Los distractores se relacionan con las medidas angulares que los estudiantes reconocen y usan más frecuentemente. La popularidad del distractor A podría deberse a que desde la figura se puede estimar que el ángulo desconocido mide un tercio del ángulo interior del rectángulo y a que muchos estudiantes confunden 45° con 90°, o creen que toda línea que divide al ángulo es bisectriz.

Este tipo de problemas geométricos son altamente exigentes para los estudiantes, pues no solo requieren la elaboración de una estrategia de resolución de más de un paso, sino que esta dependerá de conocimientos geométricos previos que el estudiante debe ser capaz de evocar y seleccionar de entre todos los que ha adquirido a lo largo de los años.

Otro elemento que incrementa la complejidad es el hecho de que en el enunciado no se dan datos numéricos explícitos. En estos casos, es probable que algunos estudiantes realicen una estimación visual de la medida.

## Propuestas de prácticas pedagógicas para abordar los principales problemas de aprendizaje detectados

Considerando los resultados de las pruebas TERCE, se han seleccionado algunas preguntas que entregan indicios de ciertos problemas en el aprendizaje de la matemática en tercer y sexto grados. A partir de un análisis de las respuestas, se han planteado hipótesis sobre las habilidades y competencias que poseen los estudiantes que han respondido correctamente, y se han generado sugerencias y recomendaciones de prácticas didácticas que podrían ayudar a desarrollar esas habilidades y competencias, incluyendo actividades que podrían conducirse en el aula y que se presentan en este apartado.

Con este ejercicio no solo se desea orientar el desarrollo de estrategias de enseñanza, sino también influir en las estrategias de evaluación (especialmente, en las de carácter formativo). Es deseable que el docente reflexione en torno a sus prácticas de evaluación de los aprendizajes y use como referentes los ítems seleccionados -sus estructuras, sus complejidades- para construir sus propios instrumentos de evaluación. Se debe recordar siempre que es necesario variar los tipos de opciones en los ítems de selección múltiple para obtener información más precisa sobre los procesos que siguen los estudiantes y evidencias de los errores más comunes. Del mismo modo, es recomendable la inclusión de preguntas abiertas en instrumentos de evaluación, ya que permite obtener información mucho más rica, completa y variada de los aprendizajes de los estudiantes.

Es necesario que los docentes tengan presente que los resultados y recomendaciones aquí presentadas parten de los resultados regionales. Estos deben guiar un esfuerzo nacional y, en particular, de cada docente para desarrollar un trabajo de aula de constante investigación, la cual permita descubrir comportamientos específicos según los contextos. Es fundamental que los docentes tengan en consideración las propuestas curriculares de cada país ya que, en algunos casos, las sugerencias que se presentan aquí deben ajustarse al nivel adecuado y ser contempladas en cuanto a sus relaciones con otros contenidos revisados previamente o en paralelo. De forma similar, aunque se trabaja con algunos aprendizajes específicos en este documento, las ideas planteadas pueden orientar la implementación de mejoras en las estrategias de enseñanza y aprendizaje en todos los temas del currículo.

Se ha procurado considerar preguntas de todos los dominios que se evaluaron en el TERCE, sin embargo, las propuestas se han organizado en torno a aprendizajes que las preguntas seleccionadas indican como de difícil aprehensión para muchos de los estudiantes y por eso, en algunos casos, se abordará más de un aprendizaje asociado a un mismo dominio, mientras que en otros, las preguntas que ejemplifican algunos de los aprendizajes pertenecerán a distintos dominios.

Para cada ítem se entrega la distribución de las respuestas y una descripción de la tarea específica que el estudiante debe realizar para responder la pregunta correctamente. Estas tareas específicas se relacionan con las descripciones generales de los niveles de desempeño superiores (Niveles III y IV), pero el propósito de estos ejemplos se centra en producir una reflexión sobre prácticas pedagógicas que mejoren los aprendizajes de los estudiantes, más que en seguir describiendo tales niveles de desempeño.

También es importante mencionar que las hipótesis que se generan para explicar por qué un grupo de estudiantes respondió de cierta forma una pregunta no intentan ser una descripción acabada de todas las posibilidades que podrían haberlos llevado a seleccionar cierta opción; más bien, intentan estar alineadas con la forma en que la pregunta en cuestión se inserta dentro de las especificaciones de la prueba en que fue incluida (dominio, proceso, nivel de desempeño).

## Propuestas didácticas para tercer grado a partir de los resultados del TERCE[5]

### Aprendizaje 1: **Realizar operaciones no contextualizadas con números naturales**

**Pregunta 1: Un sumando desconocido**

Observa:

$$3\,500 + \boxed{\ ?\ } = 5\,000$$

¿Cuál número completa correctamente la operación?

**A)** 8 500

**B)** 7 500

**C)** 2 500

**D)** 1 500

**Tarea a realizar:** Resolver un problema que requiere operar con números naturales.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| D | 22% | 8% | 27% | 38% | 5% |

[5] *En los cuadros que presentan cada pregunta, los porcentajes de elección por opción y el porcentaje de respuestas omitidas han sido redondeados al entero, por tanto, podrían no sumar 100%.*

El 38% de los estudiantes evaluados seleccionó la opción correcta. Para responder acertadamente debieron poner en práctica diversos conocimientos matemáticos. Por ejemplo, comprender la información presentada de manera simbólica; relacionar los sumandos de la adición presentada de manera horizontal con un resultado dado; identificar que el sumando desconocido de la adición puede ser obtenido aplicando la operación inversa (sustracción), plantear la sustracción necesaria para determinar la información desconocida y, finalmente, aplicar de manera correcta el algoritmo de la sustracción con reserva.

La siguiente opción con mayor selección de parte de los estudiantes es C. El 27% se inclinó por la respuesta 2 500, lo cual evidencia un problema con el desarrollo del algoritmo de la sustracción con reserva. Este grupo de estudiantes logró plantear una estrategia correcta para resolver el problema presentado, pero demuestra dificultades en la aplicación del algoritmo de la sustracción con reserva, cometiendo errores debido a los ceros en el minuendo o al restar el minuendo del sustraendo.

La opción A (8 500) fue seleccionada por el 22%. Estos estudiantes probablemente no han desarrollado las relaciones numéricas básicas, no interpretan suma y resta como operaciones inversas o no las consideran como parte de una "familia de operaciones". Interpretan de manera incorrecta que la operación mostrada es 3 500 + 5 000, sin reparar en que existe un componente desconocido en la adición y que debe ser descubierto para que se cumpla la igualdad.

Finalmente, la opción B concentró el 8% de las preferencias. Los estudiantes que seleccionaron esta opción presentan dificultades similares a quienes seleccionaron la opción A, ya que suman directamente 3 500 + 5 000, pero, además, cometen un error en la aplicación del algoritmo. En la posición de las unidades de mil, se equivocan al contar para hallar la suma, agregan 3 contando desde el 5: 5, 6 y 7, lo que los lleva a establecer el resultado 7 500.

En términos generales, los problemas que requieren aplicar las operaciones de números naturales en contextos puramente matemáticos pueden resultar ser todo un desafío para estudiantes de tercer grado. Se les enfrenta a una representación simbólica de una adición horizontal que utiliza números, en un ámbito numérico que es difícil de representar de manera concreta o pictórica, por lo que deben usar su capacidad de abstracción y las relaciones numéricas que han desarrollado en cursos anteriores. Solo aquellos estudiantes que han conceptualizado y comprendido profundamente los algoritmos de la adición, de la sustracción y la relación entre ambos, pueden utilizarlos como herramientas para resolver problemas de diferente complejidad e, incluso, utilizar un algoritmo para completar la información de otro.

Aquellos estudiantes que se encuentran en niveles de desempeño inferior deberán desarrollar estructuras conceptuales centrales antes de lograr aprendizajes aritméticos básicos. Esto es de máxima importancia, ya que para utilizar correctamente los algoritmos de la adición y de la sustracción con reserva necesitarán aprender reglas y un conjunto de pasos ordenados, lo que será más incomprensible y abstracto cuanto peor adquiridas tengan las nociones previas. (Luque & Rodríguez, 2005, p. 79).

Para que los estudiantes logren los niveles de comprensión requeridos por el problema planteado anteriormente, el docente puede recurrir a diversas actividades en las que los estudiantes relacionen las operaciones de adición y sustracción. Por ejemplo, usar tarjetas con números y signos como los siguientes:

$\boxed{13}$ $\boxed{5}$ $\boxed{18}$ $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{=}$

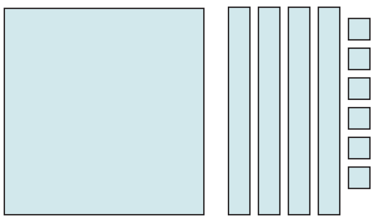
Y luego pedirles a sus estudiantes que ordenen las tarjetas formando cuatro operaciones distintas. La idea es que lleguen a establecer la "familia de operaciones":

$$5 + 13 = 18$$
$$13 + 5 = 18$$
$$18 - 5 = 13$$
$$18 - 13 = 5$$

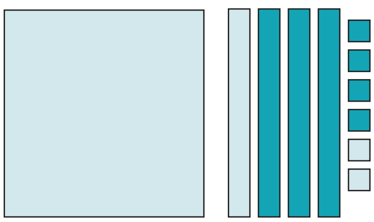
Puede comenzar con un ámbito numérico bajo e ir progresivamente aumentándolo. Sin embargo, para lograr que efectivamente los estudiantes identifiquen la relación que hay entre ambas operaciones, antes tendrán que dominar combinaciones aditivas básicas y comprender la conmutatividad de la adición.

En relación con las dificultades relacionadas con el algoritmo de la sustracción con reserva, el docente puede plantear actividades en donde se utilicen modelos pictóricos para representar centenas, decenas y unidades. Por ejemplo, puede considerar el siguiente modelo de sustracción sin reserva:

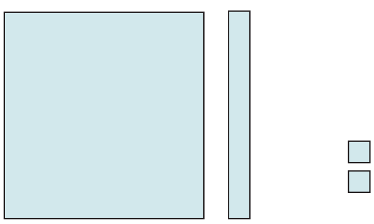
$$146 - 34 =$$



**146**

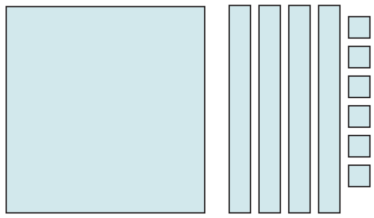


**146−34**

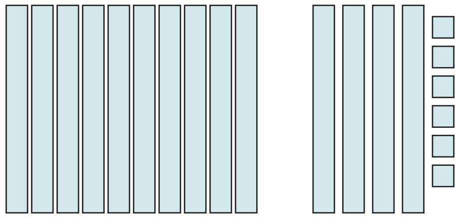


**146−34=**
**112**

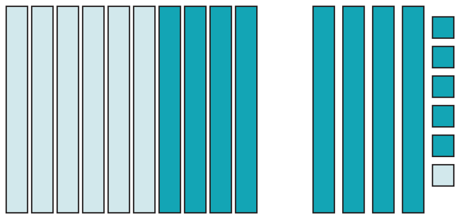
Para luego, presentar el siguiente modelo de sustracción con reserva:



**146**



**146**



**146−85=**
**61**

Este tipo de modelos permitirá a los estudiantes observar de manera pictórica el procedimiento de canje cuando se resta con reservas y relacionarlo con una sustracción representada de manera simbólica. Progresivamente, el docente puede incorporar sustracciones como 300 – 134, en la que se enfrenten a minuendos con ceros (Peng Yee, 2014, p. 121).

## Aprendizaje 2: **Identificar patrones y continuar secuencias gráficas y numéricas**

### **Pregunta 2:** **Un patrón gráfico**

Observa el orden en que van las siguientes figuras.

¿Cuál figura sigue?

**A)** 

**B)** 

**C)** 

**D)** 

**Tarea a realizar:** Identificar elementos faltantes o que continúan una secuencia gráfica.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 15% | 9% | 53% | 16% | 6% |

Para responder correctamente esta pregunta, el 53% de los estudiantes debió reconocer que las figuras presentadas forman una secuencia que sigue una regla o patrón de formación, luego debió identificar que ese patrón está formado por cuatro figuras: la primera solo muestra un segmento; la segunda, dos segmentos; la tercera, tres segmentos; y la cuarta, cuatro segmentos. Finalmente, este grupo de estudiantes debió determinar que, al repetir el patrón identificado con anterioridad, la figura que continúa la secuencia debe tener dos segmentos y, por tanto, se trata de la mostrada en la letra C.

El 16% de los estudiantes evaluados seleccionó la opción D, la segunda más elegida. Esto puede explicarse por qué la figura con un segmento es la primera del patrón y también es la última de la secuencia planteada en el enunciado. En tanto, la opción A fue preferida por el 15%. Quizás, intentando igualar la figura que está a la izquierda de la última figura presentada (como si hubiese algún tipo de simetría), o bien, realizando una lectura no tradicional de derecha a izquierda de la secuencia de figuras.

Finalmente, el 9% de los estudiantes se inclinó por la opción B, dando cuenta de una baja comprensión en términos de identificar un patrón y utilizarlo para completar una secuencia.

Los patrones aparecen a menudo en matemática y el álgebra, como lenguaje, sirve para expresar esos patrones y comunicarlos a otros de forma inequívoca. En este sentido, tres aspectos son importantes en la enseñanza del álgebra en educación primaria: hacer y deshacer (trabajar de manera inversa), generalizar (articular patrones) y expresar relaciones entre variables (función).

En tercer grado, los estudiantes debieran participar en la búsqueda de patrones y relaciones, para luego realizar generalizaciones a partir de ellos. El docente, al enseñar el álgebra, debe otorgar oportunidades para que sus estudiantes describan verbalmente las situaciones problemáticas antes de presentar lo simbólico y sus convenciones. Los patrones numéricos y relaciones numéricas entregan una base para la enseñanza futura del álgebra (Peng Yee, 2014, p. 270).

Desde temprana edad, los estudiantes abordan diferentes patrones que forman secuencias sonoras y gráficas, posteriormente van incorporando secuencias numéricas, hasta llegar a generalizar estas relaciones de manera simbólica. Lo ideal es que en este nivel los estudiantes hayan experimentado con diferentes patrones, no solo identificándolos, sino utilizándolos para completar secuencias.

En niveles previos, los estudiantes han trabajado con diversos tipos de patrones como son:

**a) Patrón del tipo AB =**

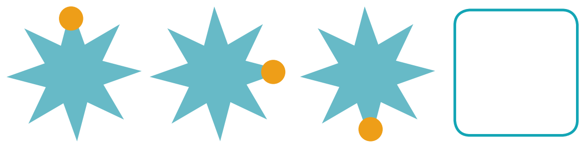
**b) Patrón del tipo AAB =**

**c) Patrón del tipo ABB =**

El trabajo con este tipo de patrones, entre otros, ayuda a los estudiantes a identificar otro tipo de reglas y su composición, lo que facilita el completar y continuar secuencias gráficas y, más tarde, secuencias numéricas.

Frecuentemente, las secuencias geométricas (o gráficas) con que se trabaja son una aproximación a las secuencias numéricas. En la pregunta del TERCE presentada, la secuencia está compuesta por figuras, pero subyace la noción de cantidad (en los segmentos que cada figura tiene). Sin embargo, también se pueden usar secuencias gráficas que aludan a propiedades puramente geométricas, como el movimiento, las ubicaciones relativas de objetos, los ángulos, que favorecen la detección de patrones que no están necesariamente asociados a números o cantidades.

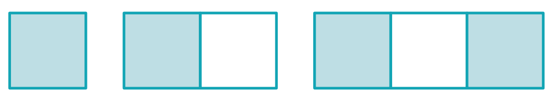
Así, el docente puede usar una secuencia gráfica como la siguiente:



Puede instar a sus estudiantes a describir las figuras, preguntándoles: ¿Existe un patrón?, ¿se puede describir ese patrón?, ¿cómo debiese ser la figura que continúa la secuencia?

Como variante, puede pedirles que creen una secuencia gráfica utilizando formas, posiciones de objetos o colores y que hagan el ejercicio de describir el patrón utilizado y luego, predecir cómo serán los siguientes elementos de la secuencia.

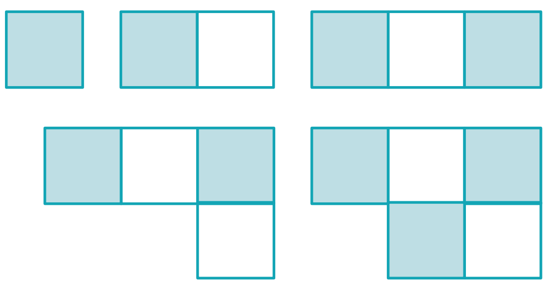
Las secuencias gráficas que incorporan tanto nociones geométricas como numéricas son muy ricas para el trabajo en el aula. Por ejemplo, si se presenta una secuencia como la siguiente:



El docente puede pedir a sus estudiantes que describan las figuras, que señalen la existencia de un patrón en la secuencia de figuras y describirlo. En este ejemplo, es fundamental que el profesor los guíe para que identifiquen más de un patrón de formación o más de una forma de describirlo. Probablemente, será fácil para los estudiantes detectar que las figuras se forman agregando un cuadrado más a la figura anterior. Pero quizás sea necesario plantear otras preguntas para especificar más la descripción de la regla de formación: ¿Importa el color del cuadrado que se agrega?, ¿De qué color es el cuadrado que se agrega en la cuarta figura?, ¿Cambia de color el primer cuadrado de cada figura?

También se puede incentivar el análisis de las relaciones numéricas que hay entre las figuras de la secuencia, no solo sobre la cantidad de cuadrados de cada una (los que aumentan de 1 en 1), sino también sobre la cantidad de segmentos que tiene cada figura (los que aumentan de 3 en 3) o sobre la cantidad de cuadrados grises y blancos que hay en cada figura. Así, se les puede pedir a los estudiantes que señalen cuántos cuadrados (en total y de cada color) y segmentos tendría una cuarta figura o una décima figura, si continúan la secuencia.

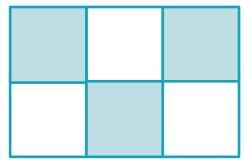
Un análisis aún más completo, tanto en términos geométricos como numéricos, se puede realizar con una secuencia como la siguiente:



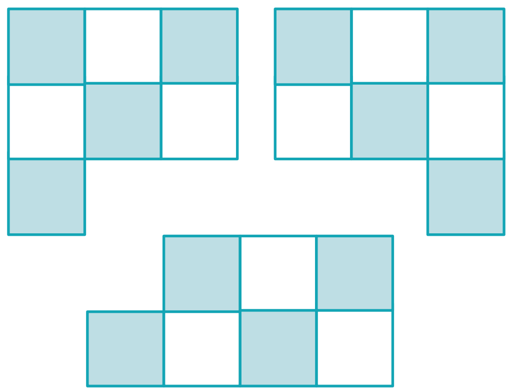
La secuencia comienza tal como la anterior, pero al mostrarse una cuarta figura que no cumple con la descripción del patrón que se había detectado se debe hacer una reinterpretación del mismo. ¿Qué sigue siendo cierto con este "cambio de reglas"? ¿Qué ha cambiado?

Claramente, hay un nuevo elemento geométrico (la ubicación del cuarto cuadrado de la cuarta figura). Pero no cambia la cantidad de cuadrados de cada figura ni la secuencia de colores de los cuadrados que se agregan. ¿Qué sucede con la cantidad de segmentos que conforman las figuras?

Una discusión interesante que puede promoverse en el aula es la de completar esta secuencia. Probablemente, habrá un gran acuerdo sobre cómo es la sexta figura de la secuencia:



Pero, ¿cómo será la séptima figura? En este punto, el docente deberá reforzar la idea de que depende de cómo se describa el patrón de formación de la secuencia y que esto no tiene por qué hacerse de una única manera. Así, posibles figuras que podrían corresponder a la séptima de la secuencia son:



En estos ejemplos de posibles séptimas figuras:

- La figura de la izquierda puede explicarse por un patrón de zigzag, que forma líneas de 3 cuadrados, en el cual siempre se agrega un cuadrado de color gris o blanco, alternándolos. De este modo, la octava figura tendrá un cuadrado blanco más, el que se ubicará a la derecha del que se agregó en la séptima figura; la novena figura tendrá un cuadrado gris más que la octava, el que se ubicará a la derecha del que se agregó en la octava figura. Mientras que la décima figura de la secuencia tendrá un cuadrado blanco más que la novena, el que se ubicará debajo del que se agregó en la novena figura.

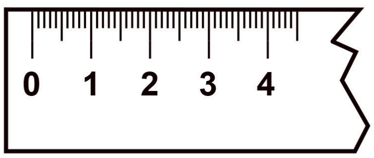
- La figura del centro puede explicarse por un patrón que también agrega cuadrados de uno en uno, alternando los colores y formando líneas de 3 cuadrados, pero que desde la segunda línea agrega siempre el primer cuadrado de una nueva línea al extremo derecho de la misma. Así, la octava figura tendrá un cuadrado blanco más que la séptima, el que se ubicará a la izquierda del que se agregó en la séptima figura; la novena figura tendrá un cuadrado gris más que la octava, el que se ubicará a la izquierda del que se agregó en la octava figura. Mientras que la décima figura, tendrá un cuadrado blanco más que la novena, pero este se ubicará debajo del cuadrado que se agregó en la séptima figura.

- En tanto, la figura de la derecha puede explicarse por un patrón en espiral que agrega cuadrados de uno en uno, alternando sus colores. De ese modo, la octava figura tendrá un cuadrado blanco más que la séptima, el que se ubicará arriba del que se agregó en la séptima figura; la novena figura tendrá un cuadrado gris más que la octava, el que se ubicará arriba del que se agregó en la octava figura. Mientras que la décima figura tendrá un cuadrado blanco más que la novena, el que se ubicará a la derecha del que se agregó en la novena figura.

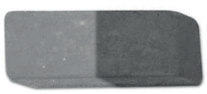
## Aprendizaje 3: **Estimar y comparar medidas**

### Pregunta 3: Estimación de longitudes de objetos

Observa el siguiente pedazo de una regla:




Estima la medida de los siguientes objetos y escribe tu respuesta al lado de cada uno en números enteros.

 ________ cm.

 ________ cm.

 ________ cm.

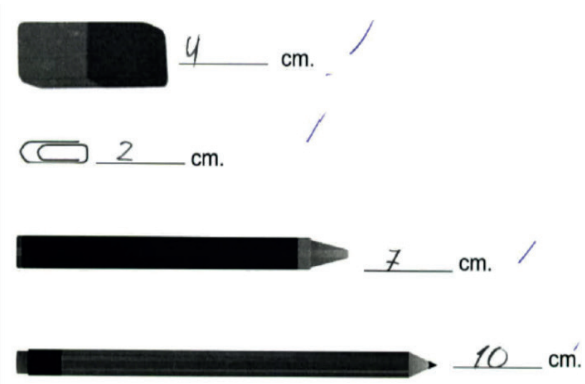
 ________ cm.

**Tarea a realizar:** Estimar longitudes de objetos usando un referente parcial.

De los estudiantes evaluados en esta pregunta abierta, el 15% entregó una respuesta considerada correcta por la pauta de corrección. Para que una respuesta estuviera bien, el estudiante debía estimar correctamente la medida de los cuatro objetos con cierto margen de tolerancia, es decir, las medidas entregadas como respuestas debían estar entre 3 y 4 cm para el borrador; entre 1 y 2 cm para el clip; entre 7 y 8 cm para el crayón; y, entre 9 y 10 cm para el lápiz.

Los primeros dos objetos tienen longitudes menores que la regla entregada en la pregunta para que usen como referente, por lo que la estimación de su medida debería ser más sencilla que los otros dos objetos, cuyas longitudes son mayores, y para estimarlas los estudiantes debían imaginar la repetición de la unidad referencial.

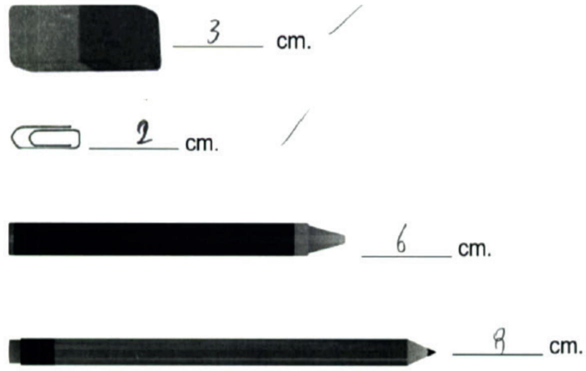
**Ejemplo de respuesta correcta:**

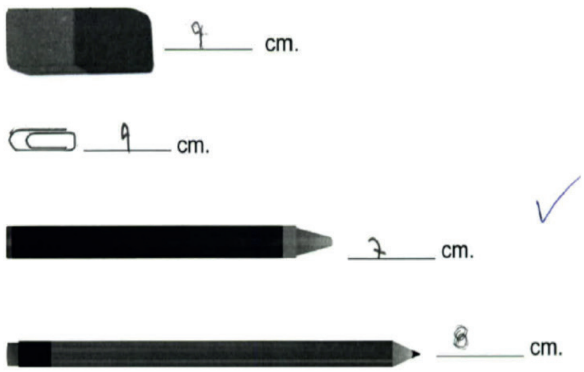



El 32% de los estudiantes evaluados entregó una respuesta considerada parcial por la rúbrica de la pregunta, es decir, algunas de las medidas entregadas como respuestas fueron adecuadamente estimadas (considerando los márgenes de tolerancia ya mencionados), siendo necesario por lo menos uno de los siguientes casos:

- Estimar correctamente la medida del borrador y el clip.
- Estimar correctamente la medida del crayón o la del lápiz.

**Ejemplos de respuestas parcialmente correctas:**

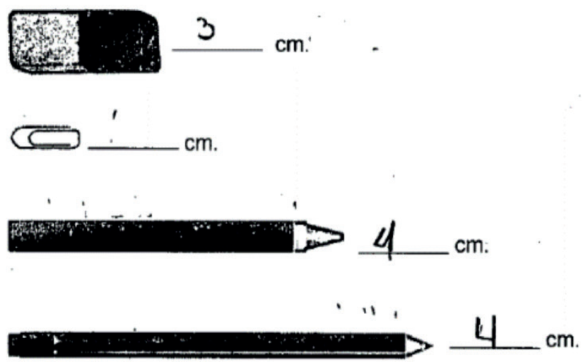


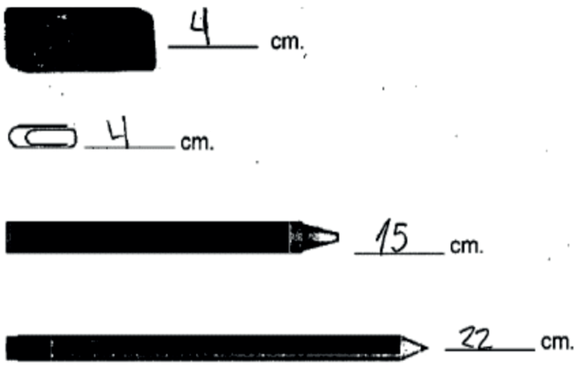




El 32% de los estudiantes entregó una respuesta considerada incorrecta, lo que podía darse en dos situaciones:

- Al estimar correctamente solo la medida del borrador o solo la medida del clip.
- Al estimar fuera del margen de tolerancia todas las medidas que se respondían.

**Ejemplos de respuestas incorrectas:**






Por último, es importante señalar que el 10% de los estudiantes no respondió esta pregunta.

Los estudiantes que respondieron correctamente llevaron a cabo varias tareas propias de la medición (Peng Yee, 2014, p. 215):

Identificar el **atributo** del objeto que se quiere medir. De un objeto se pueden medir diferentes atributos: largo, ancho, peso (masa), volumen, temperatura, entre otros. En este caso, el atributo a medir es la longitud de los objetos dispuestos de manera horizontal.

Seleccionar la **unidad** adecuada con la cual medir el atributo. En la pregunta analizada se dispone de un referente que consiste en un trozo de regla. El estudiante que ha experimentado el uso del instrumento de medición sabrá que está graduado en centímetros y que, a su vez, cada centímetro está subdividido en milímetros. Luego, al observar los objetos y su unidad de medida relacionada sabrá que debe utilizar los centímetros.

Utilizar la unidad de forma **repetida** y contar cuántas veces se utiliza para medir el atributo. En el ejemplo en cuestión, podían comparar la longitud de la goma y del clip directamente con el referente dado y determinar su equivalencia en centímetros; pero, al llegar al crayón y al lápiz debieron utilizar la estimación para continuar repitiendo el centímetro como unidad de medición y averiguar la longitud de estos objetos.

Para tomar mediciones precisas es importante que los estudiantes comprendan los siguientes principios:

1. La **conservación**, que se refiere, por ejemplo, a que la longitud de una cuerda seguirá siendo la misma si la cuerda se enrolla, o que el volumen de un líquido seguirá siendo 500 centímetros cúbicos si se traspasa a un recipiente diferente.

2. La **transitividad**, que alude a que si A es más largo que B, y B es más largo que C, entonces A es más largo que C. En el ejemplo analizado, si el borrador mide 3 cm y el crayón mide un poco más de 2 borradores de longitud, entonces el crayón mide cerca de 7 cm.

3. La **repetición de la unidad**, que se refiere a utilizar una unidad única de medición. En la pregunta, al medir el crayón y el lápiz los estudiantes deberían ser capaces de seguir repitiendo la unidad que seleccionaron (centímetros), realizando subdivisiones del objeto o extendiendo la longitud de la regla, de manera mental o pictórica, utilizando el espacio de la pregunta (Peng Yee, 2014, p. 216-218).

Claramente, la medición y estimación de medidas son procesos complejos que involucran varios principios del mundo físico, que los estudiantes de tercer grado solo percibirán mediante la experiencia repetida de la medición de objetos.

Por esto, es esencial que el docente genere instancias en la que sus estudiantes deban medir longitudes (distancia, altura, largo, etc.) usando unidades no estandarizadas. Se les puede formular preguntas como: ¿Cuántos pasos mide el largo de la sala?, ¿Cuántos lápices mide el contorno de la mesa?, ¿Cuántas palmas de mano mide la pizarra? (Borges, 2001, p. 57).

Una vez realizadas las mediciones, se les puede pedir que las comparen. Esto les permitirá descubrir por qué se necesitan las unidades de medida convencionales. Entonces, se les debería pedir que repitan sus mediciones, esta vez usando una unidad estandarizada. No tienen por qué ser milímetros, centímetros o metros, se les puede entregar a cada uno un mismo referente que servirá solo para la clase, de manera que al comparar los resultados de sus mediciones, estos se parezcan mucho más que cuando usaron unidades no estandarizadas. Posteriormente, se les debe introducir al uso de unidades estandarizadas de uso común, junto con la utilización de instrumentos como la regla, la cinta de medir y el metro carpintero.

En cuanto a la estimación de medidas, cuando los estudiantes ya manejen las técnicas para obtener mediciones de buena calidad (repetir los referentes cuidando que no se superpongan ni queden espacios entre una aplicación y otra, mantener la dirección de medida, entre otras), el docente puede comenzar a solicitarles que, previamente a la medición, hagan predicciones sobre ella y luego comparen ambas. Se sugiere que se guíe a los estudiantes desde la estimación de medidas usando referentes no estandarizados, avanzando progresivamente hacia las unidades estandarizadas y, especialmente, a las de uso común.

Una vez adquirida una estimación relativamente exacta de lo que significan “un centímetro”, “un decímetro” y “un metro”, mediante la comparación de predicciones con la comprobación empírica, se les debe guiar hacia la estimación no comprobable o cuya comprobación es más compleja. Por ejemplo, pidiéndoles que estimen la altura de la sala, las dimensiones de una cancha de fútbol, la altura de edificios o monumentos de la ciudad, de árboles, etc.

## Pregunta 4: Comparación de pesos (masas)

Observa los productos que vende un almacén:


| AVENA | HARINA | PAN | CACAO |
|---|---|---|---|
| 500 gramos | 1 kilogramo | 750 gramos | 1,5 kilogramos |

¿Cuál es el producto que tiene mayor peso?

**A)** La avena. **B)** La harina. **C)** El pan. **D)** El cacao.

**Tarea a realizar:** Resolver un problema que requiere comparar pesos (masas).

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| D | 11% | 14% | 33% | 38% | 3% |

En este ítem, el grupo de estudiantes que respondió correctamente identificó que el atributo medido en los objetos mostrados es el peso (la masa), luego que en dos de ellos se utilizó el gramo para medir este atributo y en los otros dos el kilogramo. Además, debieron establecer una equivalencia entre gramos y kilogramos para poder comparar la masa de los cuatro objetos, expresándolas todas en gramos (avena 500 g, harina 1 000 g, pan 750 g y cacao 1 500 g); o bien, todas en kilogramos (0,5 kg, 1 kg, 0,75 kg y 1,5 kg). Y, finalmente, compararon números naturales de cuatro cifras o números decimales hasta la centésima.

Otro grupo importante de estudiantes (33%) seleccionó la opción C. Ellos pueden haber identificado el atributo que se midió en los objetos, pero evidencian problemas a la hora de trabajar con la unidad seleccionada, ya que comparan directamente los números asociados a cada objeto sin reparar en que tienen distintas unidades de peso (masa).

La opción A concentró el 11% de las preferencias de los evaluados, quienes, al igual que el caso descrito anteriormente, dan cuenta de dificultades en el reconocimiento de la unidad de peso (masa) utilizada; o bien, seleccionaron el objeto que tiene una menor masa, dando cuenta de la no comprensión de la pregunta.

Finalmente, la opción B fue seleccionada por el 14%, lo que podría relacionarse con dificultades al comparar un número natural con uno decimal.

Esta pregunta presenta una baja omisión de parte de los evaluados, ya que solo el 3% no la respondió.

Como se explicitó anteriormente los estudiantes que respondieron correctamente dan cuenta no solo de su aprendizaje sobre los atributos de medición y el uso de unidades estandarizadas, sino que muy probablemente han llegado a descubrir y aplicar fórmulas y relaciones (Peng Yee, 2014, p. 220-221).

Aquellos estudiantes que se encuentren en niveles inferiores de desempeño deberían llevar a cabo estos procesos de manera práctica. La medición en el contexto escolar debería ofrecerles oportunidades de experimentar de manera concreta el aprendizaje, realizando mediciones, en este caso, con la ayuda de una balanza y asociando equivalencias entre el kilogramo y sus subdivisiones.

El docente puede pedir a sus estudiantes que comparen y ordenen dos o más objetos a partir de su peso (masa), de manera informal, utilizando elementos del entorno: lápices, cuadernos, libros, implementos deportivos, etc. Luego, usando como referente un objeto que pese 1 kilogramo, estimar la masa de otros objetos, verbalizando si pesan más, menos o lo mismo que 1 kilogramo. Es muy importante que el docente refuerce permanentemente que el peso (masa) de los objetos no se relaciona con su volumen, pues los estudiantes tenderán a considerar que los objetos más grandes pesarán más y los objetos más pequeños, menos. Por tanto, se debe reflexionar sobre la selección de objetos cuyas masas se medirán y compararán. De hecho, se les puede pedir a los estudiantes que busquen ejemplos de objetos pequeños, pero muy pesados; de objetos grandes y livianos; y, también, de objetos que varíen su forma y volumen, pero mantienen su peso (masa) (como ropa, esponjas, papel).

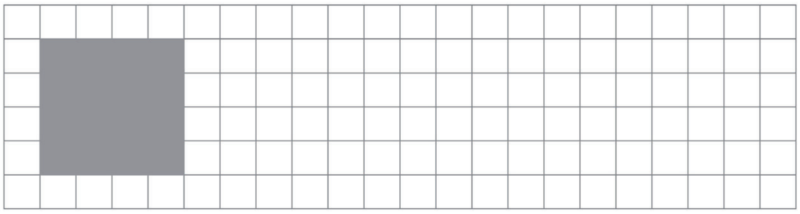
En cuanto a la conversión entre gramos y kilogramos, se pueden generar instancias para que los estudiantes relacionen ambas unidades al pesar, con ayuda de una balanza, objetos livianos en gramos y otros un poco más pesados usando kilogramos. Más tarde podrán determinar la relación que existe entre estas dos unidades de medida de peso (masa) y decidir en qué momento es más apropiado utilizar una o la otra.

La sugerencia es ir avanzando progresivamente hacia establecer equivalencias entres gramos y kilogramos, en donde puedan expresar una misma masa con ambas unidades (por ejemplo, 1 kilogramo =1 000 gramos; 1,5 kilogramos = 1 500 gramos), aunque para esto los estudiantes deberán tener conocimientos de fracciones y de números decimales. Lo mismo ocurrirá al trabajar transformaciones entre unidades de medida de longitud, como milímetros, centímetros, metros y kilómetros.

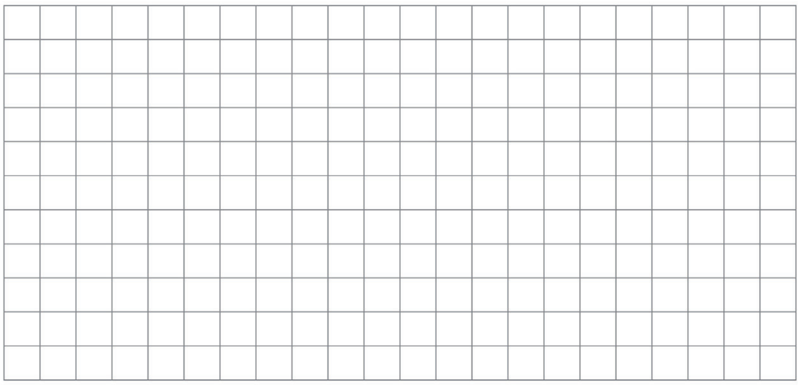
## Aprendizaje 4: **Identificar propiedades básicas de formas geométricas**

### **Pregunta 5:** Una figura nueva

Pedro dibujó un cuadrado como el que se presenta a continuación:



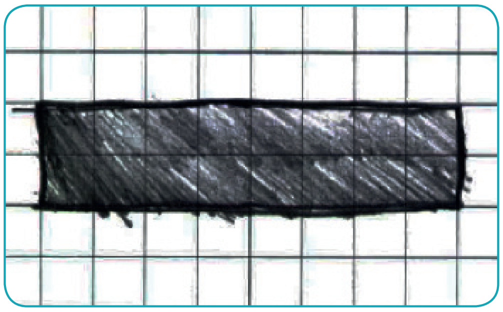
María dibujó una figura el doble de larga y la mitad de ancha que la de Pedro. Dibuja la figura que dibujó María.



**Tarea a realizar:** Resolver un problema que involucra elementos de figuras geométricas.

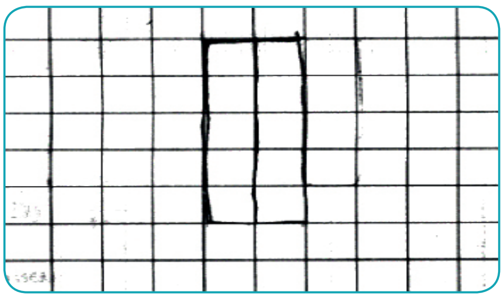
El 12% de los evaluados contestó correctamente. Para responder exitosamente esta pregunta, los estudiantes deben comprender que Pedro dibujó un cuadrado en el que sus lados miden 4 unidades lineales de la cuadrícula y que María dibujó otra figura en la cuadrícula, pero con el doble de largo y la mitad de ancho. Lo anterior supone relacionar "doble" con "dos veces", por lo que el largo no debería ser 4, sino 4 + 4, es decir 8 unidades lineales. Y, además, relacionar que "mitad" de ancho supone que dos números iguales deben sumar 4, es decir, 2 + 2, por lo que el ancho debería ser 2. Finalmente, representar sobre la cuadrícula una figura de 8 unidades de largo por 2 unidades de ancho. En la mayoría de los casos, los estudiantes que respondieron correctamente, dibujaron un rectángulo con las medidas correctas. Sin embargo, algunos estudiantes respondieron dibujando otras figuras (triángulos u otros polígonos) que quedaban inscritos dentro de un rectángulo de 8 por 2 unidades. Estas respuestas también fueron clasificadas como correctas, pues el enunciado de la pregunta no exigía una figura en particular.

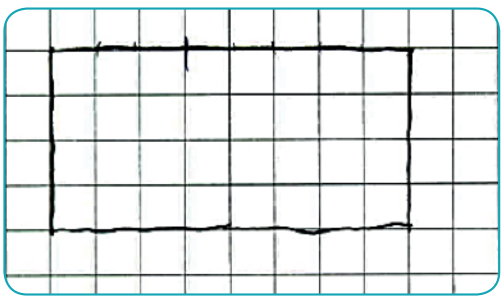
**Ejemplo de respuesta correcta:**

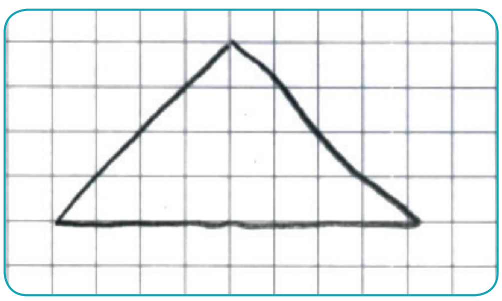


Como respuestas parcialmente correctas se consideraron aquellas en que los estudiantes solo consideraron una de las dimensiones señaladas (largo o ancho) en su figura. El 24% de los evaluados entregó una respuesta clasificada en esta categoría, dibujando una figura (nuevamente, en su mayoría, un rectángulo) que tenía de 8 o 2 unidades de ancho o largo.

**Ejemplos de respuestas parcialmente correctas:**

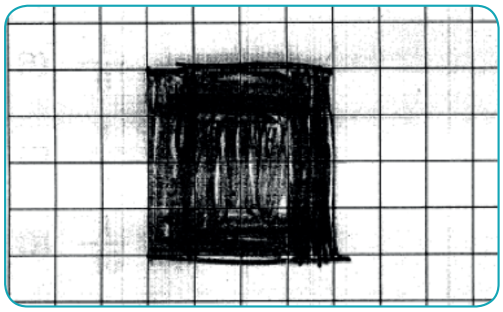


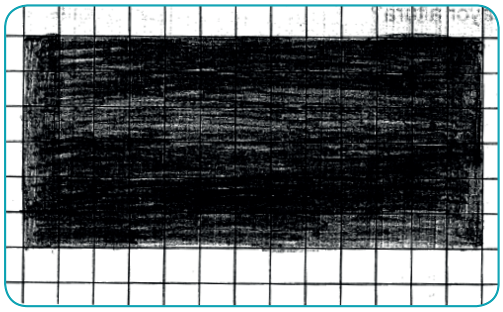


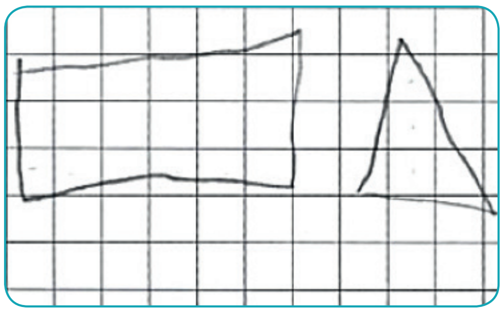


El 44% respondió incorrectamente. Estos estudiantes dibujaron otras figuras que no cumplían con las condiciones requeridas.

**Ejemplos de respuestas incorrectas:**







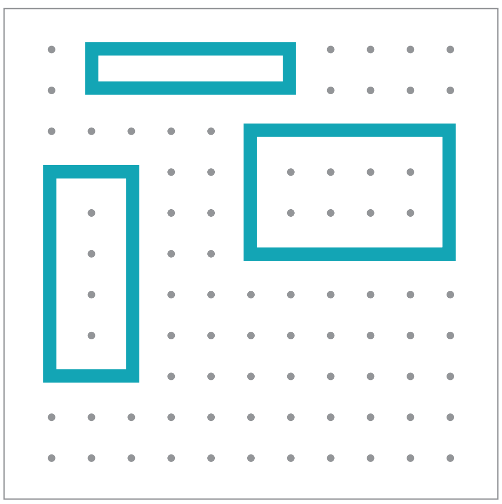
Es importante considerar que el 15% omitió esta pregunta, cantidad superior a quienes respondieron correctamente (12%).

Quienes responden exitosamente este tipo de preguntas son capaces de analizar características y propiedades de las figuras geométricas, y establecen relaciones entre dos o más figuras de acuerdo a sus propiedades. Este grupo de estudiantes se acerca a un nivel de deducción informal según Van Hiele, lo que es bastante alto considerando que la mayoría de los estudiantes de los primeros años de escolaridad se encuentran en los primeros niveles de razonamiento geométrico: reconocimiento y análisis (Peng Yee, 2014, p. 245-246).

Para ayudar a los estudiantes de los primeros niveles de desempeño a avanzar a los siguientes, es importante proveerlos de experiencias concretas en donde deban relacionarse con figuras geométricas, desde reconocerlas por su apariencia o forma hasta identificarlas de acuerdo a sus propiedades.

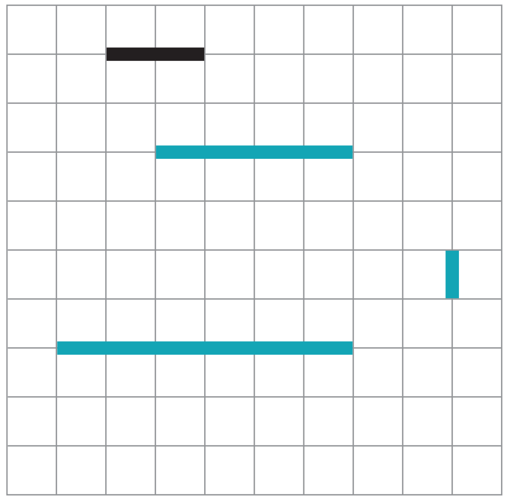
Ahora bien, junto con aprender los conceptos geométricos, los estudiantes tienen la tarea derivada de adquirir el vocabulario acorde a esos conceptos, por lo que el docente debe ser riguroso en el uso de términos: vértice (y no punta), ángulo (y no esquina), largo designando al lado más largo del rectángulo y ancho designando al lado más corto; e incorporar elementos de la aritmética como doble, triple o mitad, asociándolos con medidas, de manera que los estudiantes se relacionen progresivamente con estos términos.

El docente puede plantear actividades en las que los estudiantes deban trazar en un geoplano o una cuadrícula, figuras de acuerdo a condiciones dadas con anterioridad. Por ejemplo, les puede pedir que tracen 3 rectángulos diferentes cuyos largos midan 5 unidades, obteniendo producciones como la siguiente:

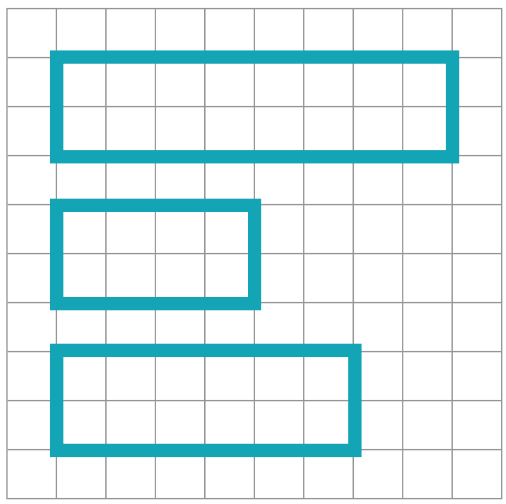


Y luego, solicitarles que modifiquen una de las dimensiones en cada rectángulo pero manteniendo la otra, de modo que los tres nuevos rectángulos tengan diferentes largos y anchos.

Otra actividad posible es presentar en una cuadrícula una línea ya trazada (en la imagen, la línea negra) y pedir que dibujen una nueva línea con el doble de su longitud, otra con el triple de la longitud original y una tercera, con la mitad de la longitud original.

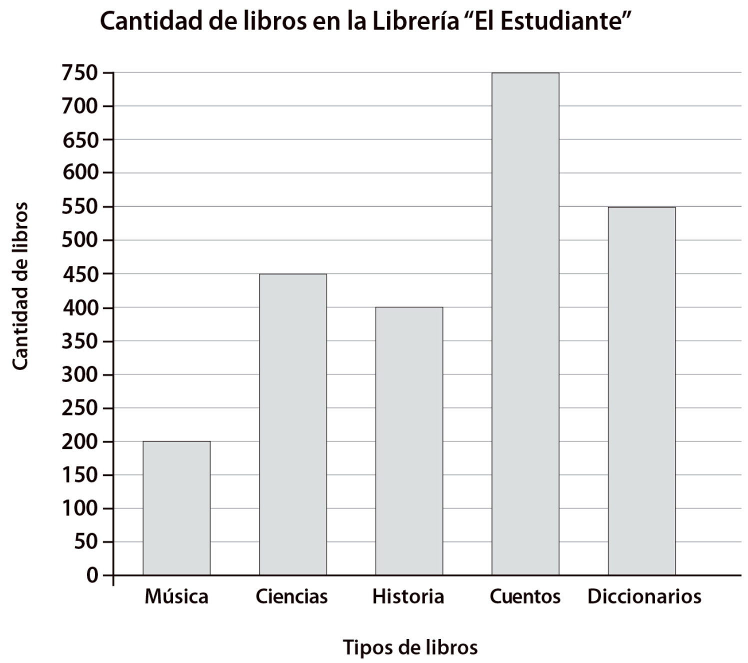


El docente podría también utilizar otra cuadrícula para representar diferentes rectángulos y comparar las medidas de sus lados, preguntar cuál es más largo o en cuántas unidades es más largo uno que otro, tal como se ilustra en la siguiente figura.



## Pregunta 6: Tipos de libros en la librería

Observa el siguiente gráfico:




Considerando la cantidad de libros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

**A)** Hay 700 libros de cuentos en la librería.
**B)** Hay más libros de cuentos que diccionarios.
**C)** Hay 250 libros de música en la librería.
**D)** Hay igual cantidad de libros de ciencias y de historia.

**Tarea a realizar:** Interpretar información presentada en un gráfico de barra.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 33% | 44% | 11% | 7% | 5% |

Esta pregunta requiere que los estudiantes realicen diversos procesos vinculados con la lectura de gráficos estadísticos: comprender que la cantidad de libros que hay en una librería se ha representado bidimensionalmente, usando el eje horizontal para organizar los tipos de libros y el eje vertical para indicar cantidades de libros; y, relacionar la altura de cada barra con las marcas del eje vertical para saber la cantidad de libros de cada tipo que hay en la librería. Además, dado que las opciones de respuestas son afirmaciones, la pregunta también requiere comparar datos del gráfico para obtener información que no está señalada explícitamente en él.

La opción A resultó muy atractiva para los evaluados, concentrando el 33% de las elecciones. Sin embargo, la afirmación de esta opción es simple y requiere realizar una lectura directa de una barra del gráfico. Probablemente, los estudiantes que la seleccionaron tuvieron problemas para identificar la marca del eje vertical que le corresponde a la barra de la categoría Cuentos. Y un factor en este error de lectura podría ser la distancia que hay desde dicha barra al eje vertical, aunque se esperaría que hubieran usado las líneas horizontales auxiliares como guías para evitarlo.

Algo similar explicaría el 11% de respuestas que corresponden a la opción C. Aunque en este caso, la barra está muy cercana al eje vertical. De todos modos, tanto A como C se evidencian dificultades para relacionar la altura de una barra en particular con el número correspondiente en el eje vertical.

En tanto, el 7% de estudiantes que escogió la opción D muestran indicios de dificultades al comparar las alturas de las barras, no relacionan la diferencia de esas alturas con una diferencia entre las cantidades de libros que hay de cada tipo.

Finalmente, el 5% respondió esta pregunta, lo que puede significar que no se siente capaz de extraer conclusiones a partir de los datos representados gráficamente.

En términos generales, los estudiantes deben comprender la lógica de construcción de los gráficos de barra: que se usan barras paralelas para representar los conteos de distintas categorías, que se utiliza una barra para cada categoría, que las barras son del mismo ancho y tienen el mismo espacio entre sí, que las alturas de las barras representan cantidades que se indican en el eje vertical, que los ejes tienen títulos para describir los datos que se están representando y que el eje vertical tiene una escala asociada. Ahora bien, para responder preguntas estadísticas los estudiantes no solo deben ser capaces de identificar que un gráfico es una representación organizada de datos recopilados, sino también deben usar esa representación para generar, mediante la interpretación, información que se deriva de las relaciones entre los datos. Y también ser capaces de identificar relaciones entre categorías, comparar información de la misma naturaleza para distintas categorías, establecer diferencias cuantitativas, etc.

Los estudiantes con menores niveles de desempeño pueden estar presentando dificultades para encontrar información en los gráficos y para leer la frecuencia representada por cada columna, puede que no sean capaces de leer información que se necesita del gráfico para responder preguntas, podrían tener problemas para leer valores que no se encuentran indicados en el eje de frecuencia, o no ser capaces de decodificar los gráficos con escala (Peng Yee, 2014, p. 292-293).

Para lograr que esos estudiantes desarrollen esas habilidades, se recomienda generar instancias reales de recopilación, representación y análisis de datos, siguiendo estas cuatro etapas:

**Etapa 1:** Presentar el problema. Se establece un objetivo a investigar que tenga sentido para los estudiantes. En este nivel, se recomienda utilizar variables cualitativas de estudio. La idea es que el objeto de estudio sea conocido por todos y que su investigación permita dar respuesta a preguntas que se hayan planteado previamente, por ejemplo: ¿Qué tipo de música será apropiado para los estudiantes en los recreos? ¿Qué color de zapatos prefieren estudiantes de distintos grados? ¿Cuáles son los deportes que más practican los estudiantes de la escuela?

**Etapa 2:** Recolectar y organizar los datos. Los estudiantes deberán decidir cómo recogerán los datos (por ejemplo, con una encuesta), deberán diseñar el instrumento y llevar a cabo el estudio. Finalmente, deberán organizar los datos, separándolos en categorías y contabilizándolos.

**Etapa 3:** Representar los datos. En niveles previos pueden haber utilizado pictogramas con escala, pero en tercer grado se espera que utilicen gráficos de barras simples para cuantificar la información por categorías. Pueden hacerlo de manera manual o con ayuda de un programa computacional.

**Etapa 4:** Interpretación de los datos. Se valora una representación clara de los datos, ya que será necesario interpretarlos y hacer deducciones a partir de estos. Una actividad a desarrollar es hacer que en grupos formulen diversas interrogantes acerca de un gráfico de barras y luego realizar un intercambio entre ellos, de manera que cada grupo formule preguntas y responda las preguntas de los otros.

Otro tipo de actividades consiste en la recopilación de diversos gráficos sencillos, presentes en periódicos o revistas y, a partir de estos, plantear interrogantes que exijan distintos niveles de análisis de información: desde identificar el contenido explícito de cada eje del gráfico hasta extraer conclusiones implícitas.

## Propuestas didácticas para sexto grado a partir de los resultados del TERCE[6]

### Aprendizaje 1: **Resolver problemas de división inexacta de números naturales**

**Pregunta 1: Orden de sillas**

Hay que ordenar 350 sillas en filas de 15. ¿Cuántas sillas sobran?

**A)** 3

**B)** 5

**C)** 10

**D)** 23

**Tarea a realizar:** Resolver un problema de división inexacta de números naturales que requiere interpretar el resto.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 8% | 34% | 19% | 34% | 5% |

[6] *En los cuadros que presentan cada pregunta, los porcentajes de elección por opción y el porcentaje de respuestas omitidas han sido redondeados al entero, por tanto, podrían no sumar 100%.*

A primera vista, esta pregunta puede parecer un simple problema de división; pero, a diferencia de muchas de las situaciones de reparto o división que el estudiante ha debido enfrentar previamente, esta requiere interpretar que la información pedida corresponde al resto de la división y no a su cociente.

De hecho, los distractores no se relacionan con selecciones erradas de la operación y tampoco con errores de cálculo o de aplicación del algoritmo de la división, sino que estrictamente con la interpretación de los resultados obtenidos al realizar correctamente la división 350:15, cuyo cociente es 23 y cuyo resto es 5. ¿Qué significa 23 en el contexto del problema? ¿Qué significa 5? Para un grupo grande de estudiantes, 23 corresponde a la cantidad de sillas que sobran, de aquí la popularidad del distractor D. Sin embargo, 23 es el número de filas con 15 sillas que se pueden armar como máximo con las 350 sillas disponibles. Otro grupo, solo un poco más pequeño, toma el resto y lo sustrae a la cantidad de sillas que debe tener cada fila, seleccionando el distractor C. Mientras que el 8% de los estudiantes extiende el algoritmo de la división al ámbito de los números decimales y obtiene como cociente el decimal 23,333..., relacionando la cantidad de sillas que sobran con la cifra 3 que se reitera en el periodo.

La mayoría de los estudiantes no fue capaz de dar respuesta a lo que se pide en el enunciado aunque, podría suponerse, ejecutan perfectamente el algoritmo de división.

La conclusión obtenida a partir de esta pregunta no es un "caso raro". Diversos estudios han mostrado una peculiaridad de los problemas de división con resto: si bien los estudiantes no tienen dificultades para establecer que la división es el procedimiento de resolución correcto, tienden a responder incorrectamente porque no interpretan la respuesta numérica en términos de la situación del problema (Lago, Rodríguez, Arana, Jiménez & Dopico, 2008).

Aprehender el algoritmo de la división no implica, necesariamente, poder resolver problemas que involucran división. Y este hecho contradice la idea instalada de que el dominio del algoritmo garantiza la resolución de problemas, ya que solo bastaría con reconocer sus ocasiones de empleo. Del mismo modo, hay casos en que los estudiantes son capaces de resolver problemas de división sin dominar el algoritmo, sino con base en ideas intuitivas sobre el reparto equitativo.

La resolución de problemas no solo es un elemento de control de lo aprendido, sino un medio y un fin que propicia el desarrollo del pensamiento matemático. Se dice que la capacidad de resolver problemas se desarrolla resolviendo problemas, pero para que esto sea cierto, los estudiantes deben ser expuestos a una selección variada de problemas, considerando diversidad de contextos y formas de preguntar. Además, es recomendable orientar al estudiante para que se organice en el proceso de resolución de problemas, dando el debido énfasis a la etapa de la comprensión del problema, para luego pasar al proceso de resolución. Solo así podrá desarrollarse en los estudiantes el reconocimiento profundo de las herramientas que tienen disponibles y la flexibilidad para responder en diversas situaciones. El empleo de un tipo único de problemas tiene asociado el riesgo de la ilusión de aprendizaje, en que los estudiantes logran la capacidad de resolver problemas, siempre y cuando estos sean similares a los ejercitados en clases.

En el caso de la división inexacta de números naturales, se debe tener en cuenta siempre que ella no da como resultado un único número, sino dos: cociente y resto. Por lo que es necesario generar problemas que den sentido a ambos resultados (Gómez & González, 2001). Lo más habitual, quizás porque se hereda del trabajo con divisiones exactas de números naturales, es encontrar contextos en los que el cociente de la división es la solución de las problemáticas planteadas. Al trabajar solo con este tipo de problemas, el estudiante puede aplicar el algoritmo y hallar la solución, pero, a largo plazo, se generan respuestas mecánicas que no incluyen la reflexión en torno al contexto del problema. Es relevante que en clases el docente también trabaje con problemas en los que la solución involucre al resto e, incluso, con situaciones en que la solución corresponda al resto y no al cociente. **Por ejemplo:**

> *En una escuela hay 125 personas que deben viajar en buses a un museo. Si en cada bus pueden viajar 45 personas, ¿cuántos buses se necesitan?*

En este problema los estudiantes deben plantear y resolver la división 125:45, obteniendo cociente 2 y resto 35. Ninguno de estos números corresponde a la respuesta. De este modo, los estudiantes deben reflexionar en torno al contexto del problema. En este caso, se necesitan dos buses (que corresponden al cociente) más un bus para que viajen las 35 personas que representa el resto.

**Un segundo ejemplo:**

> *María vende galletas envasadas en cajas con 12 galletas cada una. María horneó 134 galletas, envasó la máxima cantidad posible en las cajas y se comió las que le sobraron. ¿Cuántas galletas se comió María?*

En este problema, la respuesta alude al resto de la división 134:12. Es importante que el docente no solo considere problemas con claves textuales, como "¿Cuántas sillas **sobran**?" o "se comió las que le **sobraron**", ya que los estudiantes tenderán a elaborar "reglas" y comenzarán a asociar la palabra "sobrar" en problemas de división con el resto, lo que nuevamente genera respuestas mecánicas.

Un tipo de problemas asociado clásicamente a la división son los de reparto o partición (Itzcovich & Broitman, 2001). Como fue señalado previamente, se debe cuidar que los estudiantes no resuelvan problemas empleando división por el uso de palabras claves en el enunciado, tales como "repartir" o "agrupar", por lo que se deben plantear problemas redactados de diversas maneras y empleando distintas situaciones cotidianas. En términos generales, no debe transmitirse a los estudiantes la idea de que hay "problemas que se resuelven con división", ya que todos los problemas que se han planteado hasta ahora pueden ser resueltos aplicando distintas operaciones y estrategias (empleando restas, multiplicaciones, usando el algoritmo o haciendo dibujos, entre otras). Al proponer un problema, lo óptimo es que el docente deje que sean los estudiantes quienes encuentren el procedimiento para resolverlo, para luego conocer los métodos que usaron y socializarlos; planteando, finalmente, el algoritmo como un medio más eficiente, pero dando a entender que no es la única manera de razonar y que no siempre puede aplicarse esa estrategia. Respecto de esto último, la práctica de algoritmos tiene sentido después de una familiarización con los procesos de cálculo, asegurada previamente la comprensión, de manera que los estudiantes tengan siempre la reconstrucción o fabricación de procedimientos propios como alternativa al olvido (Chamorro, 1995).

El siguiente problema recopila parte de estas sugerencias y corresponde a un problema no rutinario, donde la operación que el estudiante debe realizar no es evidente.

**Un tercer ejemplo:**

> *Si hoy es martes, ¿qué día de la semana será dentro de 2 000 días?*

Este tipo de problemas puede ser propuesto en el aula para indagar en el razonamiento de los estudiantes. Es probable que muchos de ellos comiencen resolviendo el problema listando los días de la semana y contando uno a uno, otros reconocerán la regularidad que cumplen los días de la semana. En tanto, el docente deberá guiar el proceso, pero cuidar de no entregar la respuesta correcta. Se espera que los estudiantes puedan concluir, después de un tiempo y varios intentos, que pueden resolver de forma más rápida el problema empleando la división[7]: 2 000: 7, lo que da como cociente 285 y resto 5. ¿Qué quieren decir estos resultados? Esa es la segunda parte: invitar a los estudiantes a interpretar los resultados a la luz del contexto. En este caso, se trata de 285 semanas y el resto 5 son los cinco días posteriores al día martes. Así, la respuesta de este problema es "domingo".

El ejemplo anterior es un muy buen problema para trabajar la división con resto, ya que a pesar de que el estudiante relacione el problema con la división y aplique el algoritmo, está obligado a interpretar los datos para poder responder.

Existen otros tipos de problemas que involucran situaciones de división, como los de comparación (las relaciones entre dos cantidades se describen en términos de cuántas veces es mayor una que la otra), que son mucho más complejas, hasta el punto de que los estudiantes no se dan cuenta de que también se trata de un problema de división (Lago, Rodríguez, Arana, Jiménez & Dopico, 2008). A continuación, se presenta uno de estos problemas para trabajar en el aula:

**Un cuarto ejemplo:**

> *Renato comió 11 caramelos, casi 4 veces lo que comió Loreto. ¿Cuántos caramelos ha comido Loreto?*

Al igual que el problema del tercer ejemplo, este puede considerarse como no rutinario, ya que no es evidente la estrategia de resolución. En este problema, el estudiante debe interpretar el significado de la expresión "casi 4 veces" y, por tanto, el docente debería plantear rápidamente la pregunta "¿Qué significa que Renato comió casi 4 veces lo que comió Loreto?". Sin dar la respuesta al problema directamente, el docente también podrá formular otras preguntas y orientar el razonamiento de los estudiantes. Podrían concluir que la respuesta es 2 (ya que 11:4 tiene cociente 2 y resto 3), pero ¿tiene esto sentido en el contexto? El uso de expresiones como "casi", "un poco más de", "al menos" y "a lo más" deberá ser discutido para llegar a la respuesta más óptima al problema, ofreciendo siempre como estrategia de resolución el tanteo de cantidades. Todo esto es una parte fundamental de la resolución de problemas, una idea que debe ser fomentada permanentemente por el docente: la búsqueda de la solución de un problema es normalmente un trabajo recursivo que requiere siempre interpretar cada resultado obtenido, intentar formular una respuesta al problema con este para luego evaluar esa respuesta en el contexto del problema. Si la respuesta encontrada no tiene sentido en el problema, se deben revisar los cálculos realizados (para descartar errores) y la estrategia de resolución (para identificar si se ha completado el procedimiento planificado o el resultado obtenido es parcial y debe ser usado para un paso posterior que lleve a la respuesta).

[7] *Si usan restas se demorarán demasiado. Esa es la finalidad de que el número de días sea grande.*

## Pregunta 2: Ramos de claveles

Agustina tiene 260 claveles y quiere hacer ramos de 12 claveles cada uno. ¿Cuántos ramos podrá formar como máximo?

A) 8

B) 20

C) 21

D) 22

**Tarea a realizar:** Resolver un problema de división inexacta de números naturales que requiere interpretar el cociente.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 10% | 19% | 45% | 23% | 3% |

En este caso, la solución al problema corresponde al cociente de la división 260:12. Es decir, es un problema rutinario y cuya estrategia de resolución probablemente ha sido mucho más practicada por los estudiantes en su experiencia previa. Sin embargo, más del 50% de los evaluados respondió incorrectamente el problema.

En esta pregunta, los distractores se relacionan con errores de interpretación de los resultados de la división 260:12 (opciones A y D) y con un error en la aplicación del algoritmo de la división (opción B). El 10% de los evaluados asoció el resto a la cantidad máxima de ramos que se puede formar, evidenciando la falta de interpretación de los datos en su contexto. Mientras que los estudiantes que marcaron la opción D resolvieron correctamente la división 260:12, obteniendo 21 como cociente, pero agregaron un ramo más, por los claveles sobrantes. Por último, casi 20% de los estudiantes resolvió la división aplicando la estrategia de anexar ceros al cociente. Así, como 12 cabe 2 veces en 26, el cociente obtenido es 20.

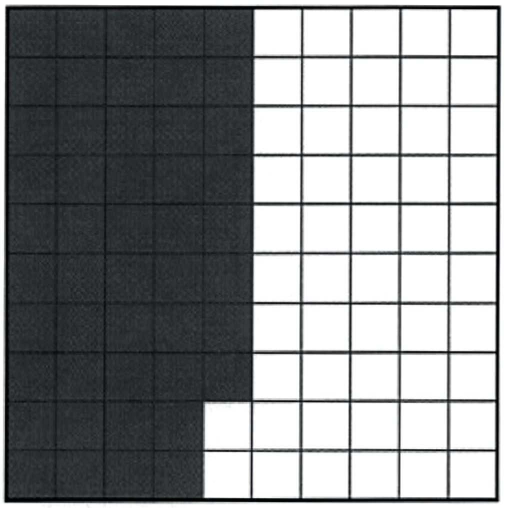
Si estos estudiantes hubieran comprobado la solución que estaban planteando como respuesta al problema, podrían haber llegado muy probablemente a la respuesta correcta. Dentro del aula, el docente debe invertir tiempo en enseñar a los estudiantes cómo comprobar sus resultados, lo que implica interpretarlos en el contexto y hacer cálculos aritméticos inversos que corroboren que la respuesta es correcta.

Por último, es importante destacar que las situaciones de reparto equitativo son particularmente relevantes, porque propician en los estudiantes el desarrollo de las habilidades de subdivisión en partes iguales y permiten cuantificar de manera implícita la fracción resultante de un reparto (De León & Fuenlabrada, 1996). La división está interrelacionada con otros conceptos, tales como: las fracciones, las razones y los números decimales, por lo que comprenderla favorecerá futuros aprendizajes.

## Aprendizaje 2: **Relacionar y operar con fracciones decimales y números decimales**

### **Pregunta 3:** Representación de un número decimal

La siguiente figura ha sido dividida en cuadrados iguales:



¿Qué número decimal representa la fracción de la figura que está sombreada?

**A)** 0,48

**B)** 4,8

**C)** 40,8

**D)** 48

| **Tarea a realizar:** Identificar un número decimal dada su representación gráfica. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
| A | 28% | 12% | 13% | 44% | 3% |

Esta pregunta requiere que los estudiantes comprendan la relación entre los números decimales con las fracciones decimales y puedan reconocer una representación gráfica de una fracción decimal. Es importante que la comprensión de las fracciones y los números decimales se logre a temprana edad, ya que estos objetos matemáticos están íntimamente relacionados con los conceptos de porcentaje, razón y proporción, centrales en los siguientes grados de enseñanza. Fracciones decimales y números decimales son dos representaciones de un mismo objeto, por lo que se recomienda que ambos sean trabajados en paralelo en el aula para que el aprendizaje no solo se centre en estas representaciones por separado, sino también en la relación que tienen entre ambas.

En este problema, el distractor D resulta extremadamente popular entre los estudiantes, pues corresponde a la cantidad de partes pequeñas que se encuentran sombreadas dentro de la figura grande. Más adelante, se darán a conocer posibles causas de este tipo de respuesta. En tanto, las opciones B y C ofrecen números decimales que se relacionan con 48, pero que no corresponden a la fracción decimal $\frac{48}{100}$. Quienes hayan seleccionado estos distractores pueden haber estado realizando un procedimiento mecánico y se confundieron, o bien, intentaban adaptar algún otro método, como la descomposición aditiva de 48 para obtener un número decimal. En todos los distractores se evidencia, en mayor o menor grado, la falta de comprensión de los números decimales.

En este ítem, los estudiantes se enfrentan a una fracción representada desde la "interpretación de medida", es decir, desde la relación entre una parte y un todo. Deben conocer cuál es la unidad o el todo. ¿Es claro para ellos que el cuadrado de 10 cuadraditos de ancho por 10 cuadraditos de largo es el todo? Es posible que en el trabajo de aula el significado de la unidad o el todo esté implícito en los usos de las representaciones gráficas usuales (cuadrados, rectángulos o círculos), pero la representación por sí misma no asegura que los estudiantes entreguen el significado correcto a la unidad o al todo. Una evidencia inequívoca de esta significación incorrecta se produce cuando un estudiante realiza una suma de fracciones del siguiente modo:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{4}{7}$$

Los estudiantes conocen y emplean los símbolos y representaciones, pero no manejan el significado. El uso de representaciones gráficas como la que se muestra en el problema debe ser acompañada de discusiones acerca de la "unidad" o el "todo".

Preguntas que pueden favorecer la noción de la unidad son las del tipo

"Si  es $\frac{1}{2}$ de la unidad, ¿cuál es la unidad?", o
"Si  es $\frac{2}{5}$ de la unidad, ¿cuál es la unidad?".

Suponiendo que los estudiantes identificaron cuál es la unidad o el todo en la representación dada, el siguiente paso para todos fue contar las 48 partes grises. A partir de esto, casi el 45% responde que el número decimal representado es 48. ¿Por qué? Es posible que la enseñanza desde la "interpretación de medida" de las fracciones sea memorística, es decir, se proporciona una receta que pone el foco en contar las partes coloreadas y la cantidad de partes totales en el dibujo, donde la primera cantidad va arriba de la raya de la fracción y la segunda cantidad va debajo de ella. Así, las fracciones son concebidas como dos números naturales separados por una raya, sin comprender su significado global ni la relación entre ambos números.

Este tipo de recetas centra el razonamiento en el conteo y, por ende, en los números naturales involucrados. De este modo, la opción D de la pregunta, que corresponde a un número natural, resulta muy atractiva y no genera ninguna disonancia, aunque el enunciado contenga las palabras "decimal" y "fracción". Una vez más, la mecanización de los procedimientos crea una ilusión de aprendizaje. Los estudiantes representan fracciones propias de forma aparentemente eficaz. Sin embargo, cuando se les solicita representar fracciones impropias o realizar operaciones con fracciones, la falta de comprensión del concepto básico queda en evidencia.

Un número racional representado desde la "interpretación de medida" debe plantearse desde la relación cuantitativa entre la parte y el todo. Para favorecer la comprensión del significado de una fracción como parte de un todo, los problemas que se planteen en el aula deberían hacer referencia explícita a la medición. Por ejemplo, preguntar "¿Cuál es la relación que existe entre la cantidad de superficie sombreada y la superficie total de la figura?" De acuerdo a la representación, las respuestas podrían ser del tipo "la superficie sombreada es la mitad del total de la figura" o "un cuarto de la figura está sombreada".

Otro tipo de preguntas que favorecen la comprensión del significado de las fracciones son aquellas planteadas en sentido inverso. Por ejemplo, "¿Cuántas veces el área de la figura gris cabe en la superficie de la figura completa?", para luego comenzar con nuevas preguntas a partir de la respuesta dada.

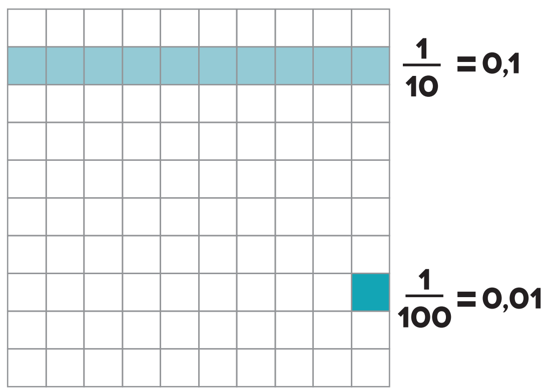
Suponiendo que un estudiante comprende que la fracción de la figura que está sombreada es el resultado de una relación cuantitativa entre la parte y el todo, podrá identificar que hay 48 partes grises de las 100 partes en que está dividida la unidad, por lo que $\frac{48}{100}$ de la superficie total del cuadrado grande es gris.

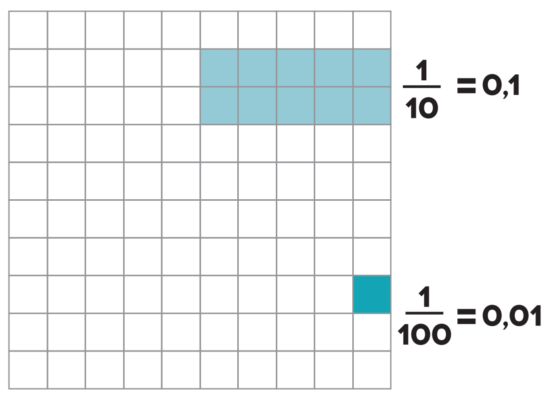
¿Cómo expresar esta representación simbólica en otra? ¿Cómo relacionar una fracción decimal con el número decimal correspondiente? Generalmente, la enseñanza de los números decimales está precedida por la enseñanza de las fracciones. Esto se debe, principalmente, a que la notación decimal está basada en las fracciones decimales. Es posible que algunos estudiantes concluyan que $\frac{48}{100} = 0{,}48$ de forma memorística ("mueva la coma decimal dos espacios a la izquierda, porque hay dos ceros en el denominador"), sin embargo, la falta de comprensión de la notación decimal hace que los estudiantes interpreten las cifras después de la coma como un número natural (Castro, 2001). Y, nuevamente, esto puede explicar la elección de parte de algunos estudiantes del distractor D en la pregunta planteada. Otro fenómeno que tiene relación con este tipo de respuestas involucra a los estudiantes que, a partir de la falta de comprensión de la notación decimal, ignoran los ceros de la izquierda (Castro, 2001); luego, 0,48 es igual a 48.

Una manera más directa de responder la pregunta es pensar inmediatamente en el número decimal, aunque, por todo lo expuesto anteriormente, es recomendable fomentar el paso de la representación gráfica a fracciones decimales y, de ellas, a los decimales durante el trabajo en el aula. Sin embargo, el paso por fracciones decimales puede realizarse en etapas iniciales para afianzar la comprensión de los valores posicionales de las cifras decimales. Para lograr esto, se sugiere trabajar con papel cuadriculado, en el cual se definan explícitamente las décimas como cada una de las 10 partes en que está dividida la unidad (asociándolas con la fracción $\frac{1}{10}$) y las centésimas como cada una de las 100 partes en que está dividida la unidad (asociándolas con la fracción $\frac{1}{100}$). Así, en la pregunta, dado que el cuadrado grande está dividido en 100 partes iguales, el estudiante puede relacionar que cada cuadradito representa una centésima, por lo que 48 cuadraditos representan 48 centésimas y obtener el decimal correspondiente a esa cantidad de centésimas: 0,48.

El trabajo con cuadrículas debe complementarse con preguntas que orienten la comprensión de los valores posicionales de décimas y centésimas, y su relación. Por ejemplo:

Dada una cuadrícula de 10 por 10, se puede solicitar a los estudiantes la representación de una décima y la de una centésima. En la etapa inicial es importante reforzar las equivalencias entre el nombre dado a las posiciones, su representación gráfica y sus representaciones simbólicas como fracciones decimales y como números decimales. Además, se debe dar relevancia a la validez de estas equivalencias, independientemente del modo en que se hagan las representaciones en la cuadrícula, pues estas no son únicas:



Algunas preguntas que pueden plantearse durante este trabajo son:

- ¿Qué representa la cuadrícula completa?
- ¿Cuántas décimas hay en la cuadrícula? ¿Cuántas centésimas hay en la cuadrícula?
- ¿Cuántas veces cabe una décima en una unidad? ¿Cuántas veces cabe una centésima en una unidad?
- ¿Qué número es mayor: una décima o una centésima? ¿Por qué?
- ¿Cuántas centésimas hay en una décima?
- ¿Por qué crees que la décima recibe ese nombre? ¿Por qué crees que la centésima recibe ese nombre?

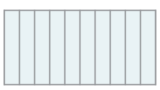
Se pueden generar más preguntas para afianzar la comprensión, para luego solicitar a los estudiantes que representen números como 48 centésimas en la cuadrícula y reconozcan otras representaciones.

Una tarea posterior, relacionada con el trabajo con cuadrículas y fundamental para lograr una compresión cada vez más profunda de las fracciones decimales y los números decimales, es la graduación de rectas numéricas. Por ejemplo, se puede entregar a los estudiantes una larga tira de papel con el cero ya marcado y una tira más pequeña, cuya longitud corresponda a 1 unidad. Sin el uso de reglas, los estudiantes deben ubicar los números naturales del 1 al 10 en la tira larga:



1 UNIDAD

Luego, se les debe solicitar que dividan el trozo pequeño con longitud 1 unidad en 10 partes iguales del siguiente modo:

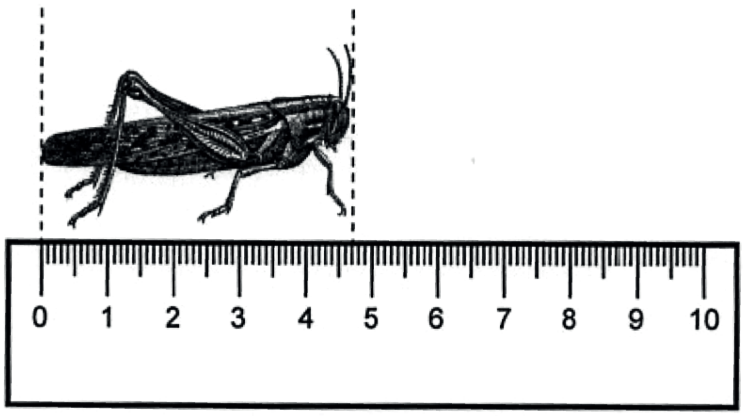

1 UNIDAD

Se pregunta entonces a los estudiantes qué representa cada subdivisión de la unidad. Dado el trabajo previo con cuadrículas, no debería ser de gran dificultad para los estudiantes identificar las décimas. Empleando el trozo pequeño de papel se les solicita a los estudiantes que ubiquen en la tira larga los decimales 3 décimas, 7 décimas, etcétera. Primero se trabaja con números entre 0 y 1, para luego solicitar que ubiquen números mayores, como 12 décimas, 25 décimas, etcétera. Esta actividad puede continuarse dividiendo en 10 partes iguales cada décimo de la tira pequeña de papel, es por esto que se debe trabajar con trozos de papel lo suficientemente largos.

En estas propuestas didácticas, las fracciones decimales y los números decimales están ligados a la medición de superficies o longitudes. Es beneficioso que, luego de realizar actividades como la descrita, se trabaje con ideas asociadas a la medición (por ejemplo, en 1 cm hay 10 milímetros). Una manera es asociar la tira graduada construida por los estudiantes con una regla.

## Pregunta 4: Medición con números decimales

Observa la siguiente imagen:




¿Cuántos centímetros de largo mide exactamente el grillo?

A) 0,47 cm.

B) 4,07 cm.

C) 4,5 cm.

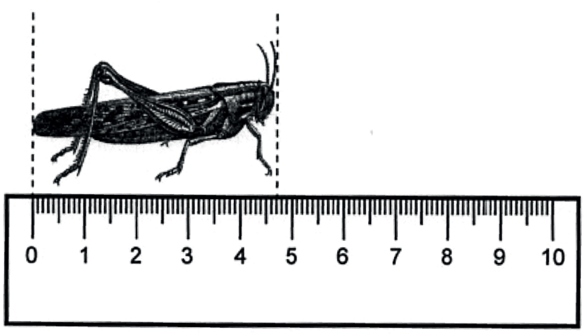
D) 4,7 cm.

**Tarea a realizar:** Calcular la longitud de objetos usando medidas estandarizadas.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| D | 17% | 23% | 13% | 45% | 1% |

Este ítem está relacionado con la comprensión de los números decimales en contextos de medida y se usará para ejemplificar ciertos obstáculos que pueden producirse por una enseñanza de los números decimales que no considera su relación con la medición.

**Por ejemplo, observe la regla graduada:**




Al preguntar por cuántos centímetros de longitud mide el grillo, es posible que un estudiante vea que de 0 a 10 hay 100 divisiones y que la longitud del grillo ocupa 47 divisiones, por lo que el grillo mide $\frac{47}{100}$ centímetros, es decir, 47 centésimas de centímetro o 0,47 centímetros. Y, aunque este razonamiento está correcto desde la perspectiva de la receta "contar las partes que ocupa el grillo y la cantidad de partes totales en que se divide la regla, donde la primera cantidad va arriba de la raya y la segunda cantidad va debajo de ella", claramente hay una falla en la identificación de qué representa la unidad en el contexto de la pregunta.

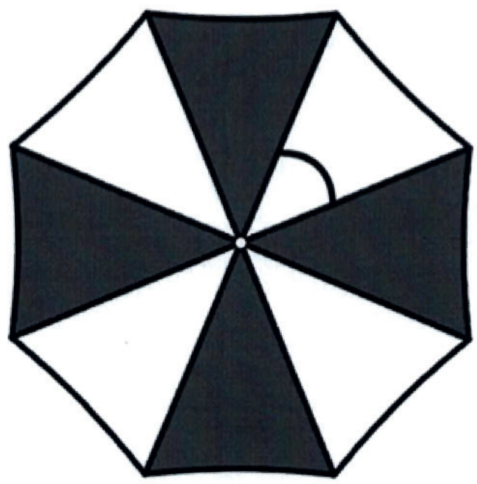
Por otro lado, puede darse que algunos estudiantes identifiquen que la respuesta es 4 cm y algo más, pero teniendo en consideración que las 7 divisiones que ocupa el grillo después del 4 son 7 de 100, concluyan que la longitud del grillo son 4 cm más 0,07 centímetros.

Así, los distractores A y B tienen relación con errores de interpretación de números decimales en el contexto de medida. Y su popularidad entre los estudiantes evidencia la relevancia de reflexionar en torno a cómo la enseñanza de las representaciones gráficas de las fracciones decimales y de los números decimales puede incidir en la comprensión de la medición de longitud con un instrumento tan cotidiano como la regla, por lo que se recomienda relacionar estos contenidos cada vez que sea posible.

## Aprendizaje 3: **Medir ángulos**

### **Pregunta 5: Ángulos en un paraguas**

En la siguiente imagen de un paraguas, los ángulos formados por dos varillas contiguas tienen la misma medida:



¿Cuánto mide el ángulo marcado?

**A)** 8º.

**B)** 22º.

**C)** 45º.

**D)** 60º.

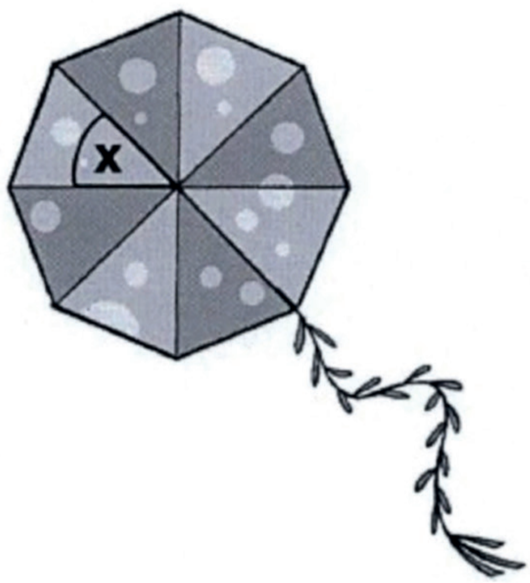
| **Tarea a realizar:** Resolver un problema que involucra ángulos de polígonos. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
| C | 48% | 18% | 21% | 12% | 3% |

En este problema, casi el 50% de los estudiantes consideró que el ángulo marcado mide 8°, asociando la medida en grados con la cantidad de ángulos congruentes que se forman con las varillas del paraguas. La gran popularidad de ese distractor entrega indicios sobre la falta de comprensión que muchos de los estudiantes tienen en cuanto a la medición de ángulos. La selección de un distractor que contiene la única "cantidad" presente (aunque sea implícitamente) en el enunciado es algo que los estudiantes de los primeros años escolares utilizan como estrategia de respuesta muy frecuentemente, sin embargo, ya en sexto grado no se espera que sea tan común.

Veamos cómo se comparan estos resultados con los de una pregunta muy parecida, pero que no incluye la opción que resultó tan popular en el ítem anterior:

## Pregunta 6: Ángulos en un volantín

El dibujo muestra *(el barrilete / la cometa / el papalote)* de lados iguales que construyó Rodrigo. ¿Cuánto mide el ángulo (**x**) formado por *(las varillas / los palos)* de *(el barrilete / la cometa / el papalote)*?




A) 36°.

B) 45°.

C) 60°.

D) 80°.

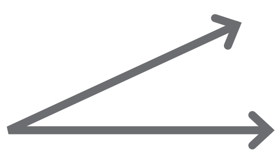
**Tarea a realizar:** Resolver un problema que involucra ángulos de polígonos.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 44% | 30% | 11% | 10% | 4% |

En este segundo problema, aun cuando no se incluyó la atractiva opción 8°, solo el 30% de los estudiantes responde correctamente. Nuevamente, la opción A es la más popular, lo que podría indicar que muchos estudiantes, al no ser capaces de discriminar entre las distintas medidas angulares, eligen la primera opción. Pues, en este caso, el distractor A podría relacionarse más bien con un error de conteo (para estudiantes que dividen el ángulo completo de 360° en 10 partes iguales y no en 8) o también, con una asociación inmediata del ángulo completo de 360° con la opción que más se parece a esa medida.

Las respuestas de estas dos preguntas dan indicios de que una gran mayoría de los evaluados no tiene las nociones básicas de medición de ángulos. No hay referentes visuales de qué significan medidas como 8°, 45°, 90°, 180°, etc.

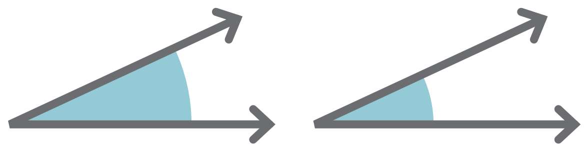
La dificultad de los conceptos de ángulo y medida angular queda manifestada al realizar esta sencilla pregunta que podría hacerse en el contexto escolar: ¿Cuánto mide el siguiente ángulo?



Esta pregunta tiene, en estricto rigor matemático, más de una respuesta correcta. Un estudiante podría, en teoría, responder 35° (al referirse al ángulo agudo de la figura) o 325° (al referirse al ángulo convexo de la figura), pero también 395°, –35°, –325°, entre otras expresiones que representan la misma medida angular.

En la literatura, las definiciones de ángulo se pueden clasificar en tres categorías: ángulo como región del plano o del espacio, ángulo como par de líneas con un origen común y ángulo como giro (García & Luengo González, 2005). Las dos primeras suponen que "ángulo" es un concepto estático, mientras que la tercera corresponde a una visión "dinámica" del mismo. Es posible que los docentes estén enseñando una, dos o hasta tres de estas concepciones sin ser conscientes de ello y sus implicancias.

Si se observan las representaciones de un mismo ángulo como par de líneas o rayos con origen común:



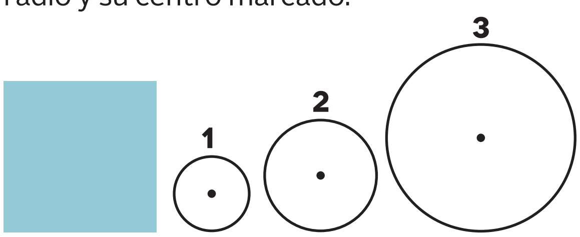
Al preguntar a los estudiantes cuál de estos ángulos tiene mayor medida, es probable que respondan que el presentado a la izquierda mide más porque el sector circular marcado tiene mayor área. Esta dificultad podría deberse a la confusión que puede generar una definición "como región del plano" de ángulo. Es más probable que los estudiantes que tienen una visión dinámica del concepto se den cuenta que ambos ángulos tienen igual medida, ya que pensarán en "la cantidad de giro necesaria para mover una línea a la posición de la otra".

Es relevante que el docente esté consciente de que la naturaleza del concepto "ángulo" está asociada a los significados que construye el propio estudiante a partir de las experiencias en el aula, existiendo componentes cualitativos por la manera de representarlo, cuantitativos por la medida de los ángulos y un componente que tiene relación con la definición formal que se entrega del concepto. Todo lo anterior se conjuga y genera la propia definición de ángulo en los estudiantes. Pero, como se vio anteriormente, si se entregan sin intencionalidad representaciones y definiciones diferentes en distintos momentos de la escolaridad, es probable que se generen confusiones conceptuales.

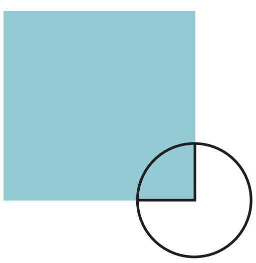
Por otro lado, la medición de un ángulo en la escuela suele estar precedida por la medición de longitudes. Sin embargo, "medir una longitud" y "medir un ángulo" son dos acciones de naturaleza diferente que pueden generar confusión en el estudiante, ya que la medición de un ángulo podría ser relacionada con la medición de la longitud de un arco, sobre todo cuando se emplean representaciones de la categoría "par de líneas o rayos con origen común".

Los ángulos, entre otras magnitudes como la superficie y el volumen, gozan de propiedades que solamente pueden ser captadas a partir de deducciones lógicas, ya que la deducción geométrica debe sobrepasar las imágenes intuitivas, de manera que los datos geométricos obtenidos del exterior deben organizarse en un conjunto estructurado (Chamorro 2003). A continuación se propone una actividad basada en el trabajo de Araceli y Montiel (2009) para la construcción de la noción de ángulo, que puede ayudar a los estudiantes a responder preguntas como las incorporadas en TERCE.

Se entrega a los estudiantes un cuadrado de papel y 3 círculos hechos de un material plástico transparente, cada uno de diferente radio y su centro marcado:




Es necesario trabajar con alfileres, una regla y lápices con tinta permanente. La idea es solicitar a los estudiantes que ubiquen el centro del círculo 1 en uno de los vértices del cuadrado, usando un alfiler para sujetarlos, para luego trazar los radios coincidentes con los lados del cuadrado:

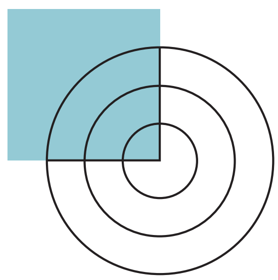


El estudiante colorea la región que tienen en común con el cuadrado. Es en este momento donde el docente debe guiar el razonamiento del estudiante con preguntas del tipo: ¿Qué parte del círculo es el que coloreaste? Los estudiantes responderán por la cuarta parte (siguiendo distintos razonamientos y formas de presentar la respuesta), a lo que el docente debe pedir una manera de comprobarlo.

Una manera de comprobarlo es haciendo girar el círculo alrededor de su centro (por el que está unido al vértice del cuadrado), coloreando la región que tienen en común con el cuadrado en cada giro. El docente debe consultar por la parte del círculo coloreado en cada giro, los estudiantes podrán concluir que en cada giro se colorea un cuarto del círculo. El docente puede crear más preguntas para que los estudiantes relacionen la actividad con un cuarto de giro.

Luego se solicita a los estudiantes que realicen el mismo procedimiento anterior con el círculo 2, preguntando a los estudiantes qué parte del círculo colorearon, para después solicitar la comprobación.

En una tercera etapa, se pide a los estudiantes que hagan coincidir el centro de los tres círculos con un vértice del cuadrado. Se pregunta a los estudiantes qué parte del círculo 1 tienen en común con el cuadrado (región delimitada por los lados del cuadrado), la misma pregunta se realiza para los círculos 2 y 3.

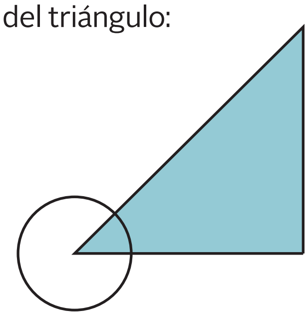


La respuesta siempre es la misma. Una vez que el docente se cerciore de que todos los estudiantes están comprendiendo lo que sucede, se les pregunta por lo que pasaría si se utilizara un cuadrado más grande o más pequeño.

Con esta simple actividad, los estudiantes se van aproximando al concepto de ángulo a través del giro. Por medio de la guía del docente, que usa preguntas intencionadas, los estudiantes pueden relacionar la esquina del cuadrado con un cuarto de una vuelta completa. Note que hasta ahora no es necesario nombrar el concepto ángulo.

Luego, se solicita a los estudiantes recortar el cuadrado por la diagonal; ellos mismos deberán concluir que dos esquinas del cuadrado quedarán divididas en dos partes iguales (el estudiante lo puede comprobar superponiendo ambos recortes). Además, con las preguntas del profesor y trabajo con material concreto, pueden concluir que esto se cumple para cualquier cuadrado. Empleando una de las mitades se puede volver a repetir el procedimiento anterior utilizando círculos iguales a los anteriores.

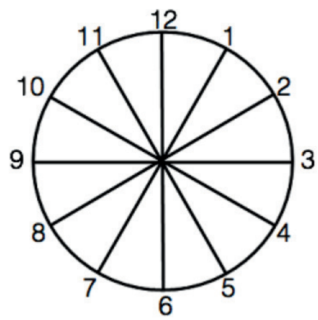
Se solicita, entonces, a los estudiantes que ubiquen el centro del círculo 1 de manera coincidente con el vértice del triángulo ubicado en la esquina desde donde se trazó la diagonal en el cuadrado, usando un alfiler para sujetarlos, para luego marcar los radios coincidentes con los lados del triángulo:



Se pregunta a los estudiantes "¿Qué parte del círculo quedó encima del triángulo?". Como esta vez es menos evidente, los estudiantes podrán verse en la necesidad de girar el círculo alrededor de su centro, coloreando cada región encontrada hasta completar las 8 partes iguales. Una vez concluida esta etapa, el docente puede preguntar nuevamente por la parte del círculo que queda encima del triángulo y por cuántos giros tuvieron que hacer para llegar a la respuesta.

El estudiante debe realizar la misma actividad con los círculos 2 y 3, de modo que concluya que, sin importar el tamaño de los círculos y del cuadrado -y, por tanto, del triángulo-, cada giro siempre corresponde a la octava parte del círculo. El profesor puede realizar preguntas que refuercen la relación entre la mitad de la esquina del cuadrado con un octavo de una vuelta completa.

Esta secuencia didáctica puede seguir empleando un triángulo equilátero y la mitad de un triángulo equilátero, de modo que los círculos queden divididos en partes iguales más pequeñas cada vez. Es posible pasar del trabajo con material concreto a la tarea con dibujos, relacionando la división de la circunferencia en 360 partes iguales con un transportador, donde 1 de esas 360 partes se define como un grado sexagesimal. Araceli y Montiel (2009) proponen trabajar con un objeto cotidiano: un reloj analógico.



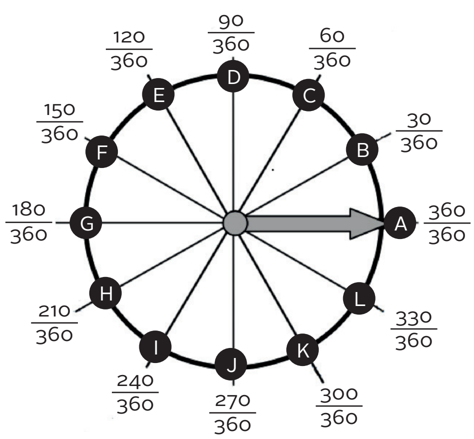

En este caso, el docente guía el razonamiento del estudiante, empleando las conclusiones de las actividades anteriores y haciendo preguntas, como ¿A qué fracción de vuelta completa equivale un giro del 1 al 2? o ¿A qué fracción de la vuelta completa equivale un giro del 1 al 4? Note que existen distintas respuestas correctas para estas preguntas, ya que no está definido el sentido de giro, por lo que este es el momento para trabajar con las distintas maneras de expresar una misma parte de una vuelta completa y entregar el sentido de giro que todos usarán.

Se pueden sacar diversas conclusiones, por ejemplo, que un giro del 4 al 1 son $\frac{3}{12}$ de una vuelta completa, lo que es igual a $\frac{1}{4}$ de una vuelta completa, relacionando las actividades anteriores con esta. A partir de esto mismo, el estudiante podrá concluir, con ayuda del docente, que $\frac{1}{4}$ de una vuelta completa se da con 3 giros de $\frac{1}{12}$ de una vuelta completa.

Para evitar la problemática del sentido de giro que no coincide con el orden en que están puestos los números en el reloj, las autoras de la secuencia didáctica proponen cambiar los números por letras, comenzando por reemplazar 3 por A.

¿Qué pasa si se siguen haciendo subdivisiones en partes iguales? Se puede invitar a pensar al estudiante en qué pasaría si cada doceavo se divide en 30 partes iguales: ¿Cuántas partes habría en un doceavo?, ¿Cuántas partes habría en dos doceavos?, ¿Cuántas partes habría en tres doceavos? La idea es que el estudiante concluya que el círculo queda dividido en 360 partes iguales, de modo que el docente pueda comenzar a preguntar a qué fracción de la vuelta completa equivale un giro de A al B, cuando ahora cada doceavo está dividido en 30 partes iguales.

Con las preguntas guías del profesor, el estudiante debería ser capaz de concluir estas fracciones:




El docente puede trabajar con preguntas que hagan relacionar al estudiante un giro de A a D con $\frac{3}{12}$ de una vuelta completa, lo que es igual a $\frac{1}{4}$ de una vuelta completa y que a su vez es equivalente a $\frac{90}{360}$ de una vuelta completa.

Al definir cada una de estas 360 partes como 1 grado, se puede preguntar al estudiante por cuántas de estas partes hay en un giro de A hasta D. El estudiante, luego de todo el trabajo previo, podrá responder que son 90 partes de las 360, como cada parte es 1 grado, podrá concluir que en un giro de A hasta D hay 90 grados. Esto se puede reiterar con distintos giros y diferentes sentidos, de modo que relacionen la representación gráfica que han hecho con el transportador. Así, se relacionan todas las experiencias de aula, en donde por ejemplo $\frac{1}{4}$ de giro es equivalente a $\frac{90}{360}$ de una vuelta completa, lo que equivale a 90°, lo que se relaciona con la esquina del cuadrado de la primera actividad.

Con esta secuencia didáctica no solo se ha trabajado el desarrollo conceptual de "ángulo" y de "grado sexagesimal", sino también se ha avanzado en la comprensión de las fracciones propias como representación de una parte de un todo.

Experiencias como la anterior requieren de bastante creatividad y reflexión del docente. Su éxito radica en no entregar definiciones formales a priori, en hacer preguntas intencionadas para que sean los propios estudiantes quienes obtengan las respuestas y sean capaces de generar sus propias definiciones informales, de modo que al final del proceso el profesor institucionalice el saber. Por lo mismo, el docente debe establecer el momento oportuno para realizar esta actividad, considerando la sincronización con otros contenidos, pues la experiencia podría perder valor si los estudiantes ya han trabajado con ángulos en años anteriores.

## Aprendizaje 4: **Comprender el concepto de medida y realizar conversiones entre unidades de medida**

### Pregunta 7: Duración de un viaje

Pepe se va de viaje, aborda un autobús a las 3 horas y 50 minutos y llega a su destino a las 11 horas y 35 minutos. ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a su destino?

**A)** 7 horas y 45 minutos.

**B)** 8 horas y 15 minutos.

**C)** 11 horas y 35 minutos.

**D)** 14 horas y 25 minutos.

**Tarea a realizar:** Resolver un problema que involucra conversiones de unidades de medida.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 19% | 39% | 19% | 20% | 3% |

Analizando los resultados de esta pregunta, se observa que casi el 40% de los estudiantes parecen haber resuelto el problema reduciéndolo a un procedimiento aritmético: restan la cantidad de horas (11 horas menos 3 horas) y luego restan la cantidad de minutos (50 minutos menos 35 minutos). La operación empleada evidencia que estos estudiantes comprenden que el tiempo que tardó Pepe en llegar a su destino corresponde al tiempo trascurrido entre los horarios de llegada y salida, pero aplican el procedimiento directo sin cuestionarse por el sentido de lo que están haciendo.

Los estudiantes que marcaron la opción C relacionan la hora de llegada con el tiempo que demoró en el viaje, con independencia de la hora de salida, lo que revela una severa dificultad en la concepción que tienen del tiempo.

Los estudiantes que marcaron la opción D evidencian una nula compresión del contexto del problema planteado. Para ellos, el tiempo transcurrido desde que Pepe aborda el autobús hasta que llega a su destino equivale a la suma de los horarios de partida y llegada. Dentro del procedimiento empleado, suman los 50 minutos con los 35 minutos obteniendo 85 minutos, lo que equivale a 1 hora y 25 minutos. En su respuesta se podría reflejar que estos estudiantes pudieron efectivamente establecer la equivalencia entre 85 minutos y 1 hora y 25 minutos, pero al no sumar esa hora manifiestan errores graves, tanto en la interpretación del problema como en el uso de la información.

Como se planteó en las propuestas para tercer grado, para adquirir el concepto de medida, los estudiantes deben al menos desarrollar las nociones prelógicas de conservación de la cantidad (las medidas se conservan, la cantidad a medir no varía) y la transitividad entre cantidades (las medidas se pueden comparar y ordenar). Como el problema aborda las unidades de medidas de tiempo, el estudiante debe, como mínimo, comprender que el tiempo transcurre de igual manera al estar en la escuela o en el cine (conservación de la cantidad) y que si un evento A dura más tiempo que un evento B, y B dura más tiempo que un evento C, entonces A dura más tiempo que C (transitividad entre cantidades).

En términos generales, para trabajar con medidas es necesario que los estudiantes desvinculen la cantidad a medir de otros datos que están asociados con la percepción (por ejemplo, los objetos de mayor tamaño tienen más masa) y, además, es necesario que comprendan que si un todo está compuesto de partes agregadas, es posible subdividirlo. Los principios de sustitución e iteración también son elementos clave para comprender el concepto de medida (Caggiani, Pastrana & Alliaume, 2009). Estos principios se traducen, por ejemplo, en la certeza de que si para medir se colocan 10 varas de 1 cm de longitud cada una, una a continuación de otra, es lo mismo ocupar para medir 1 vara de 10 cm de longitud.

De acuerdo con la etapa del desarrollo de los niños de sexto grado, se asume que el concepto de medida se encuentra incorporado y trabajado en niveles anteriores.

Con ese supuesto, se tendrá que en la base de una enseñanza efectiva de la conversión de unidades de medida está el trabajo práctico y relacionado con la vida cotidiana. No se deben limitar los cambios de unidades de medida a meros procedimientos algorítmicos realizados de manera mecánica, los que se fundamentan en la aritmética en vez de la medición misma. Cuando un estudiante es capaz de transformar correctamente una unidad de medida a otra, fuera de un contexto relativo a la vida real, se crea la ilusión de que el estudiante "aprendió" (Chamorro, 2003). El docente debe reflexionar en torno a cuál es el objetivo de aprendizaje final que se persigue: ¿Es memorizar un procedimiento de transformación de unidades de medida?, ¿Es aplicar un procedimiento de transformación de unidades de medida solo a ejercicios descontextualizados? En función del objetivo de aprendizaje se debe articular la enseñanza y la evaluación. Note que la carencia de sentido que puede tener para el estudiante un procedimiento empleado le impide resolver problemas como el de la pregunta planteada.

Para resolver el problema anterior, los estudiantes debieron haber relacionado que el tiempo empleado en el viaje de Pepe es el tiempo transcurrido desde que aborda el autobús hasta que llega a su destino. Para identificar estos momentos se dan las horas y minutos. Considerando que los relojes son instrumentos de medición que acompañan a los estudiantes en diversos formatos y que, generalmente, indican las horas y los minutos que han transcurrido en un día, el problema planteado es evidentemente cotidiano.

La medición real del tiempo, empleando instrumentos cotidianos como relojes o cronómetros, es una actividad didáctica deseable de implementar. Por ejemplo, para que la hora de término de un evento y su duración no sean relacionadas sin considerar la hora de inicio, es posible que el docente solicite a sus estudiantes que anoten la hora de partida y llegada de un estudiante que da una vuelta completa al patio de la escuela. Algunos de los estudiantes pueden emplear un cronómetro para determinar el tiempo que se demoró en terminar de dar la vuelta completa, mientras que otros pueden trabajar con relojes y anotar la hora de llegada. En este caso, es posible preguntar a los estudiantes por el tiempo que tardó el compañero en dar una vuelta completa, indagando sobre los diferentes modos en que responden la pregunta, recolectando evidencia sobre los errores de razonamiento o procedimentales.

También puede consultarse al estudiante que dio la vuelta por el patio, por la estimación del tiempo que empleó y trabajar con este tópico que ayuda a los estudiantes a evaluar la pertinencia de los propios resultados que obtengan. Al trabajar con relojes y cronómetros, y hacer cálculos con ambos instrumentos, es probable que también emerjan los errores de medición, haciendo reflexionar a los estudiantes acerca de las desviaciones debidas a la elección del sistema numérico de referencia, los errores de redondeo, las incertidumbres generadas por la imprecisión del instrumento de medida y las ligadas a la inestabilidad del objeto medido o a las condiciones de medida, junto a los errores procedimentales o de cálculo.

Otro aspecto relevante a tener en cuenta, previo a la enseñanza de la conversión de unidades de medida, es considerar todas las formas posibles de representar los tiempos indicados. Por ejemplo: "3 horas y 50 minutos", "10 minutos para las 4", "03:50", "3h 50 min", de modo de incorporar distintas propuestas de trabajo que favorezcan la flexibilidad del pensamiento.

Las unidades hora y minuto son agrupamientos de 60 unidades (sistema sexagesimal). Si bien es necesario que los estudiantes conozcan las equivalencias con que se realizan las conversiones de unidades de tiempo, es imprescindible que estas igualdades se apliquen en situaciones de la vida cotidiana.

Así, se pueden plantear problemas como el siguiente:

> *Manuel comenzó a responder una prueba a las 09:10 de la mañana y la terminó 55 minutos después. ¿A qué hora terminó de responder su prueba Manuel?*

Para resolver este problema, los estudiantes deben comprender que "09:10 de la mañana" es equivalente a las "9 horas y 10 minutos". En una etapa inicial, el estudiante puede apoyar su razonamiento en relojes análogos construidos en cartón o representados en software educativos. El estudiante representa la hora de inicio en el reloj y avanza en 55 minutos. Esto puede ayudar a concretizar el abstracto concepto de tiempo, pero la idea es avanzar despegándose de esos apoyos y lograr, en primera instancia, imaginar el reloj en movimiento, para al final valerse de la aritmética como herramienta para determinar con mayor rapidez los resultados.

Es importante indagar en el razonamiento de los estudiantes, sin dar previamente un procedimiento para resolver el problema. En este caso, se deben agregar los 55 minutos a la hora de inicio para conocer la hora de término. Es posible que los estudiantes en un estado más incipiente de aprendizaje sumen los 55 minutos a las horas, por lo que es importante recalcar que se deben relacionar los minutos con los minutos. Es probable que los estudiantes operen basándose en lo siguiente:

$$\begin{array}{rr} & 09:10 \\ + & 00:55 \\ \hline & 09:65 \end{array}$$

Es posible pedir a los estudiantes que representen las 09:65 en un reloj analógico; probablemente pondrán la manecilla horario apuntando al 9, pero la dificultad la tendrán con el minutero. Esta representación puede contribuir a que los estudiantes lleguen a su propio conflicto cognitivo, lo cual se debe aprovechar para que relacionen la equivalencia entre "65 minutos", "60 minutos y 5 minutos" y "1 hora y 5 minutos".

Finalmente, 09:65 se puede reescribir como "9 horas y 65 minutos" y, a su vez, 65 minutos como "1 hora y 5 minutos". Entonces, se puede trabajar con los estudiantes el reemplazo de una sentencia en otra, para así construir la respuesta correcta en base a la idea de "9 horas y 1 hora y 5 minutos", es decir, "10 horas y 5 minutos".

Lo óptimo es que el docente enseñe estrategias mentales que sean más intuitivas y prácticas. Por ejemplo, 55 minutos se puede redondear a 60 minutos, sabiendo que 60 minutos equivale a 1 hora, el estudiante puede sumar directamente una hora al horario de inicio del evento y luego restar 5 minutos al tiempo resultante.

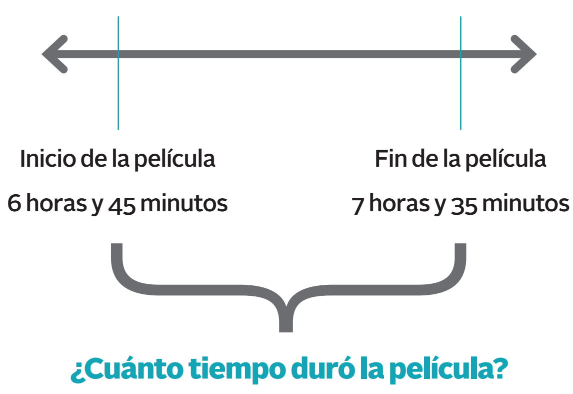
El siguiente es un problema más parecido a la pregunta inicial:

> *Paula vio una película que comenzó a las 6 horas y 45 minutos y terminó a las 7 horas y 35 minutos. ¿Cuánto tiempo duró la película?*

Es importante que el docente desarrolle en sus estudiantes la autoevaluación de la pertinencia y coherencia de las soluciones que obtienen. Por ejemplo, para un estudiante que suma las horas y los minutos, no habrá que indicarle que cometió un error, sino que habrá que consultarle si tiene sentido que una película dure más de 13 horas. Por lo mismo, es fundamental que los problemas que utilicen los docentes sean reales y tengan un sentido práctico y lógico para los estudiantes.

La realización de actividades prácticas, en donde los estudiantes tomen la hora utilizando instrumentos de medición, como relojes digitales o análogos, al comienzo y al término de situaciones cotidianas (como al comenzar y terminar la clase de matemática), estimando y luego calculando la duración de estas situaciones, favorecerá que la resolución de este tipo de problemas sea realizada desde la comprensión del contexto.

El docente podría representar la situación en una línea de tiempo para comprenderla mejor:




Una manera de abordar el problema es calcular la "distancia temporal" entre ambos instantes, así el estudiante intentará calcular la diferencia basando su razonamiento en algo como:

$$\begin{array}{rr} & 07:35 \\ - & \underline{06:45} \end{array}$$

De la evidencia tomada de la prueba TERCE, se sabe que algunos estudiantes restarán los minutos de manera que les dé un número positivo como resultado. En estos casos, más que indicar al estudiante que cometió un error, se le debe interrogar en el caso hipotético de que la película comenzó a las 06:45 y duró 1:10 minutos, preguntando a qué hora terminó. En este caso los estudiantes encontrarán una respuesta que no coincide con los datos del problema original, por lo que solos serán capaces de concluir que algo anda mal.

Los estudiantes deben comprender por qué es necesario transformar "7 horas y 35 minutos" en "6 horas y 95 minutos" para poder realizar la resta desde el punto de vista aritmético. Es necesario ir paso a paso, evidenciar que 7 horas es lo mismo que 6 horas más 1 hora, sin obviar lo que para un adulto parece evidente. Así, el estudiante podrá llegar a concluir que la película duró 50 minutos.

$$\begin{array}{rr} & 06:95 \\ - & \underline{06:45} \\ & 00:50 \end{array}$$

Lo anterior puede ser un procedimiento aritmético muy complejo para algunos estudiantes, por lo que se recomienda anteceder este tipo de trabajo con el uso de relojes analógicos. Cada estudiante puede construir un reloj de cartón o usar relojes en software educativos y resolver los problemas haciendo uso de este instrumento: por ejemplo, puede marcar la hora de inicio del evento y girar las manecillas hasta llegar a la hora de finalización, contabilizando los minutos transcurridos.

## Pregunta 8: Equivalencia de unidades de volumen

¿A cuántos mililitros equivalen 1,5 litros?

A) 15 000 mililitros.

B) 1 500 mililitros.

C) 150 mililitros.

D) 15 mililitros.

**Tarea a realizar:** Convertir unidades de volumen.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 10% | 33% | 21% | 33% | 3% |

La tarea solicitada al estudiante es convertir unidades de medida de volumen. A pesar de ser una tarea directa, el porcentaje de elección de la respuesta correcta no alcanza el 35%.

De la evidencia se puede extraer una conclusión general: la mayoría de los estudiantes que respondieron mal esta pregunta no sabe que 1 000 mililitros es equivalente a un litro. Saben que existe una relación asociada a alguna potencia de 10, pero esta asociación tal vez solo esté guiada por las opciones de respuesta de una prueba de opciones múltiples.

Quienes marcaron las opciones C y D probablemente no logran imaginarse 1 mililitro de agua, pues estas opciones son fácilmente descartables para quienes puedan cuantificar 15 o 150 mililitros. Por esto, es deseable que durante las clases en donde se trabajen unidades de medida de volumen se incluya el uso de instrumentos de medición reales. En este caso, el docente podría mostrar qué es un mililitro, centilitro, decilitro o un litro de agua (idealmente teñida para que se pueda observar), utilizando probetas, pipetas, buretas, etcétera. Un estudiante que tiene una idea concreta de lo que es un mililitro podrá saber inmediatamente que 15 mililitros nunca podrán ser iguales a 1,5 litros.

Existen alrededor de 20 prefijos empleados para nombrar múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida, por ejemplo: mili, centi, deci, deca, hecto y kilo. Lo ideal es que los estudivantes comprendan que estos prefijos tienen un significado. Un estudiante que relaciona el prefijo "mili" con "la milésima parte de algo" puede realizar conversiones de unidades de medida de volumen o de longitud.

¿A cuántos litros equivalen 15 000 mililitros? Si mililitros es la milésima parte de un litro, entonces el estudiante podría razonar del siguiente modo:

$$\textbf{15 000 mililitros} = 15\,000\ \frac{1}{1\,000}\ \text{litros}$$

$$= \frac{15\,000}{1\,000}\ \text{litros}$$

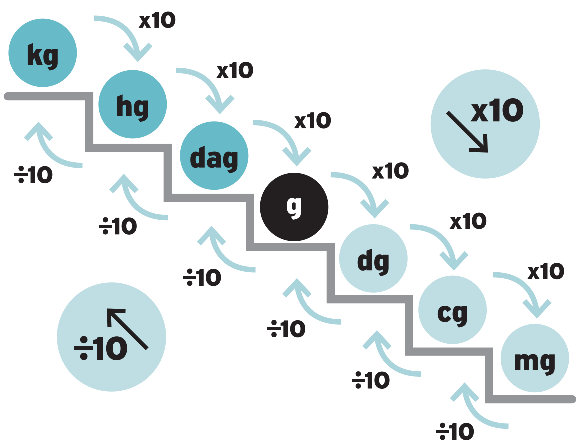
$$= 15\ \text{litros}$$

¿A cuántos litros equivalen 1 500 centilitros? Si centilitros es la centésima parte de un litro, entonces el estudiante podría razonar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 1\,500 \text{ centilitros} &= 1\,500 \, \frac{1}{100} \text{ litros} \\ &= \frac{1\,500}{100} \text{ litros} \\ &= 15 \text{ litros} \end{aligned}$$

Esta manera de razonamiento implica realizar operaciones básicas, las cuales se trabajan constantemente a lo largo de la etapa escolar, pero no siempre es necesario realizar los cálculos por escrito. El cálculo mental también puede ser empleado por los estudiantes, siempre y cuando tengan claro que 1 litro equivale a 1 000 mililitros (idealmente no memorizando algo sin sentido, sino que conociendo un mililitro de agua e imaginando que 1 000 porciones iguales de ese mililitro de agua forman 1 litro) y, además, sabiendo que 1,5 litros significa 1 litro más la mitad de otro litro. Así los estudiantes suman mentalmente 1 000 mililitros más la mitad de 1 000 mililitros.

Existen procedimientos ampliamente extendidos para facilitar las conversiones de unidades de medida. Por ejemplo, "la escalera", cuya gráfica asociada a la conversión de unidades de medida de masa se presenta a continuación:




A los estudiantes se les enseña que si suben peldaños dividen por 10 y si bajan, multiplican por 10, tantas veces como escalones suban o bajen. Este procedimiento puede ser útil para realizar cálculos sin comprenderlos, ya que se basa en el uso de procedimientos algorítmicos memorísticos. Este y otros procedimientos estándares están altamente didactificados, pero nada tienen que ver con la conceptualización de la medida y con el problema conceptual del cambio de unidades (Chamorro, 2003). Otro ejemplo de procedimientos algorítmicos que se usan frecuentemente en la conversión de unidades de medidas basados en lo memorístico es la "regla de tres", que se emplea como una receta ("multiplique cruzado y divida por el término libre").

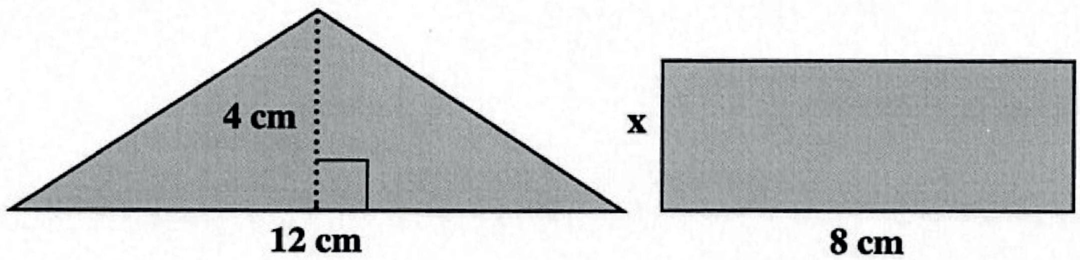
Los dos métodos anteriores tienen la ventaja de lograr que la mayoría de los estudiantes logren efectivamente convertir unidades de medida. Sin embargo, favorecen la disociación entre la acción de conversión y la comprensión de las definiciones de cada unidad de medida y de las relaciones entre ellas. Además, privan a los estudiantes de la experiencia de descubrir las regularidades propias del sistema métrico decimal, que usarán en distintos contextos cada vez que trabajen con números. La desventaja principal de usar métodos memorísticos en la conversión de unidades de medidas es que los estudiantes no desarrollan la cuantificación que debiera estar siempre referida a la unidad de medida. La invitación es a que los docentes reflexionen en torno a su práctica pedagógica para que decidan el momento en que sus estudiantes tienen suficientemente adquiridos los conceptos de medida y la cuantificación de sus distintas unidades, para entregarles herramientas que harán más eficiente su trabajo.

Como indica María del Carmen Chamorro en su libro "Didáctica de las Matemáticas para primaria", el desarrollo de las representaciones que hace un individuo en torno al cambio de unidades está ligado a la adquisición e interiorización de distintas representaciones del mismo hecho (Chamorro, 2003).

## Aprendizaje 5: **Diferenciar los conceptos de perímetro y área**

### **Pregunta 9:** Áreas y perímetros

El triángulo y el rectángulo siguientes tienen igual área.




¿Qué longitud tiene el lado **x** del rectángulo?

**A)** 3 cm.

**B)** 4 cm.

**C)** 6 cm.

**D)** 8 cm.

**Tarea a realizar:** Resolver un problema más complejo que involucra el cálculo de perímetros y áreas de polígonos.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 21% | 39% | 13% | 24% | 2% |

Para resolver correctamente este problema, los estudiantes deben calcular el área del triángulo y determinar la expresión que corresponde al área del rectángulo, para finalmente igualar ambas expresiones y hallar el valor de x.

Casi el 40% de los estudiantes marcó B. Esto podría explicarse pensando en que algunos de estos estudiantes determinaron el área del triángulo de manera correcta, obteniendo 24 cm$^2$, pero igualaron esta cantidad al perímetro del rectángulo. Sin embargo, la popularidad de este distractor hace pensar que muchos, al no comprender el problema, simplemente consideraron que la altura del triángulo y el lado desconocido del rectángulo medían lo mismo.

Los estudiantes que marcaron la opción C, probablemente, calcularon correctamente la expresión asociada al área del rectángulo, sin embargo, no ocurre lo mismo con el área del triángulo. Para determinar el área del triángulo multiplican las longitudes de la base y la altura dadas y, luego, igualan esta cantidad al área del rectángulo.

Finalmente, casi el 25% de los estudiantes calcula el área del triángulo sumando las longitudes de la base y la altura dadas. Lo mismo hacen para determinar el área del rectángulo: suman las longitudes de los dos lados dados y luego igualan las “áreas” que han calculado y obtienen el valor de x.

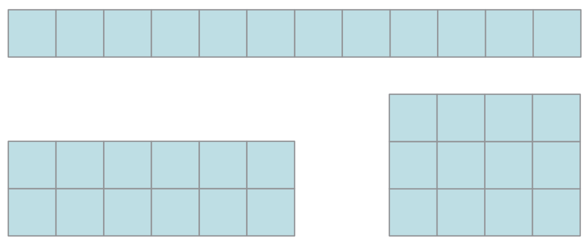
En la didáctica de la matemática, la introducción de la noción de obstáculo se debe a Brousseau: “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo” (Brousseau, 1998, p. 120). Un ejemplo de lo anterior es el siguiente: en los primeros años de escolaridad se enseña que el sucesor de un número es siempre una unidad mayor. Pero aunque ese postulado solo tiene sentido y validez en el conjunto de los números naturales, algunos estudiantes aplicarán estas ideas a otros ámbitos numéricos y se obtendrán errores del tipo “el sucesor de 1,4 es 1,5”.

El origen de los obstáculos puede ser, entre otros, epistemológico. Los obstáculos de origen epistemológico están estrechamente ligados al saber matemático (Chamorro, 2003). Un ejemplo de este tipo de error persistente se da en operaciones del tipo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{(a+b)}$, con $a$ y $b$ números naturales. Es relevante que los docentes conozcan los obstáculos epistemológicos identificados por la didáctica de la matemática, ya que es inevitable su presencia en los estudiantes y son resistentes a ser modificados. Es por esto que el docente debe preparar situaciones didácticas específicas e intencionadas que combatan las preconcepciones erróneas y resistentes en los estudiantes.

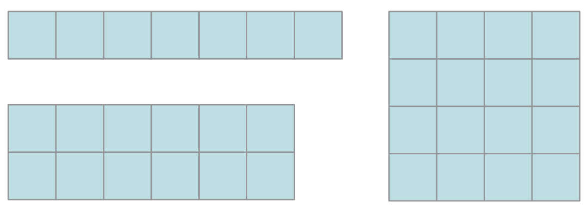
Entre los obstáculos epistemológicos identificados por la didáctica de la matemática, se encuentra la noción de perímetro en relación con la de área (Chamorro, 2005). Numerosas investigaciones han concluido que gran cantidad de estudiantes de todas las edades están convencidos de que existe una relación de dependencia entre los conceptos área y perímetro, relacionándolos de manera que si A y B son dos figuras planas, se cree erróneamente que:

- Si el perímetro de A es mayor que el perímetro de B, entonces el área de A es mayor que el área de B.
- Si el área de A es mayor que el área de B, entonces el perímetro de A es mayor que el perímetro de B.
- Si el perímetro de A es igual que el perímetro de B, entonces el área de A es igual que el área de B.
- Si el área de A es igual que el área de B, entonces el perímetro de A es igual que el perímetro de B. (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007)

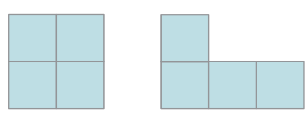
Es relevante que los docentes reconozcan este problema, para que de manera consciente e intencionada generen prácticas pedagógicas que enfrenten a sus estudiantes con figuras geométricas que tengan igual área y distinto perímetro, o viceversa. Un ejemplo accesible consiste en presentarles familias de rectángulos con la misma área, pero distintos perímetros:



Y familias de rectángulos con el mismo perímetro, pero distintas áreas:



También es conveniente que los docentes trabajen con figuras irregulares cóncavas y convexas para abordar este error, de modo de evidenciar intencionadamente que, en general, el área no depende del perímetro de la figura.



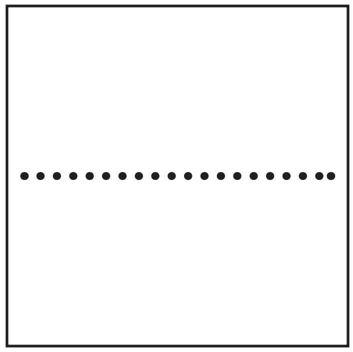
Es favorable emplear figuras planas cóncavas, no solo convexas y usuales, ya que de este modo los estudiantes no asocian el área y el perímetro con un conjunto limitado de figuras, como si estos conceptos fueran propios y exclusivos de las figuras elementales que habitualmente se estudian en la escuela.

Pero dibujar en la pizarra o trabajar con imágenes de figuras en libros o videos no es suficiente. Es necesario complementar estas prácticas con el uso de materiales concretos. Mayoritariamente se reconoce en la literatura que los errores no son aritméticos, sino conceptuales. Además, se sabe que lo habitual es brindar a los estudiantes las superficies dibujadas y no recortadas, lo que constituye un obstáculo didáctico (Chamorro, 2003), pues esa forma de representación refuerza las confusiones ya existentes entre la superficie y su borde, entre área y perímetro.

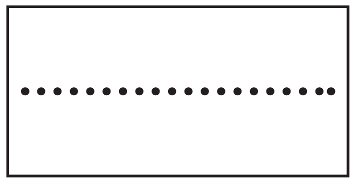
Entregar material concreto a los estudiantes, por ejemplo figuras geométricas recortadas en cartulinas de colores, permitiría mediante el tacto una diferenciación muy clara entre líneas y superficies, y una apreciación de la bidimensionalidad (Chamorro, 2003). La concepción geométrica de superficie puede ser trabajada comparando superficies de figuras planas; por ejemplo, entregando al estudiante dos figuras distintas de igual área y pidiéndole que demuestre que ambas superficies tienen igual área:

El estudiante podrá recortar una de las figuras originales, trasladar, pegar las superficies, entre otros procedimientos que surgen solamente cuando se enfrentan al trabajo con material concreto.

Otra alternativa para trabajar los conceptos de área y perímetro con material concreto es entregar a los estudiantes un cuadrado de papel, pedirles que lo doblen por la mitad del siguiente modo:

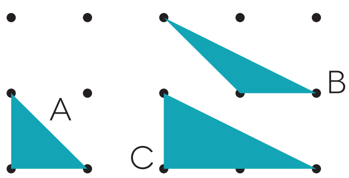


Luego, se les pide que recorten a través del doblez, para volver a doblar cada mitad obtenida por la mitad:



De esta manera, los estudiantes obtienen cuatro tiras de papel iguales. Se plantean preguntas del tipo: Si colocan las 4 tiras en una sola fila unidas por el lado más corto, ¿tiene el rectángulo obtenido la misma área que el cuadrado original? ¿Tiene el mismo perímetro que el cuadrado original? Se puede solicitar a los estudiantes que respondan sin medir, para que luego comprueben sus respuestas utilizando una cuerda o una regla.

Otra opción para ejercitar con los estudiantes los conceptos de área y perímetro es el geoplano. Este mecanismo facilita la comprensión de los conceptos y permite trabajarlos de manera conjunta:



A partir del geoplano anterior se puede trabajar con los estudiantes el por qué los triángulos A y B tienen igual área, pero la mitad del área del triángulo C (Chamorro, 2003).

Dado que los obstáculos epistemológicos son persistentes en el tiempo y están constantemente influyendo en las concepciones de los estudiantes, es relevante que el docente dedique un tiempo al estudio de área y perímetro, pero conceptualmente, no como meros problemas de cálculos aritméticos. Así, el trabajo con material concreto (recortes, tangramas, geoplanos, entre otros) a toda edad es una contribución a la mejora de la calidad de los aprendizajes. Cuando la enseñanza de área y perímetro solo se enfoca en el cálculo aritmético, es fácil caer en trampas conceptuales tales como "a mayor área mayor perímetro". Un estudiante que carece de experiencias concretas que sirvan de referencia y que ayuden a crear un conflicto cognitivo entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades, no comprenderá conceptualmente términos como la superficie, la longitud o el volumen (Chamorro, 2003).

Las experiencias que se ofrecen a los estudiantes deben ser variadas. El uso abusivo de cuadrículas como medio único para determinar el área de una figura podría dar una representación de la superficie próxima a un rectángulo o a un polígono fácilmente cuadriculable y sin agujeros (Chamorro, 2003). Las cuadrículas son un medio útil, es posible trabajar en ellas las nociones de área y perímetro al igual que en el geoplano, pero deben ser complementadas con otras herramientas. Es posible desarrollar actividades provechosas en el aula usando recortes, como ya se vio, pero también se podrían construir distintas figuras geométricas con un perímetro constante usando un hilo atado o quebrando espaguetis.

## Aprendizaje 6: **Representar información en tablas y gráficos**

### **Pregunta 10: Pasajeros por automóvil**

Se registró el número de ocupantes de 100 autos al pasar por un determinado lugar. Con los datos obtenidos se confeccionó la siguiente tabla:

| Cantidad de personas por *(auto/carro)* | Cantidad de *(auto/carro)* |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 35 |
| 3 | 30 |
| 4 | 20 |
| 5 | 10 |
| 6 | 0 |

¿Cuál de las siguientes informaciones se extrae de la tabla?

**A)** Pasó solamente 1 *(auto/carro)* con 5 personas.
**B)** Pasaron más *(autos/carros)* con 2 personas que con 3.
**C)** Pasaron más *(autos/carros)* con 5 personas que con 4.
**D)** Pasaron por ese lugar 21 personas en total.

**Tarea a realizar:** Interpretar datos presentados en una tabla.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 32% | 22% | 13% | 29% | 3% |

A partir de la interpretación de la información de la tabla, solo el 22% de los estudiantes logró concluir que la única información verdadera fue la presentada en la opción B.

Más del 30% marcó la opción A, es decir, consideró cierto que pasó 1 automóvil con 5 personas. Los estudiantes que escogieron este distractor invirtieron la información de las columnas de la tabla, considerando la "cantidad de personas por auto" como la "cantidad de autos" y viceversa.

Podría ser que un error como el anterior también explique algunas de las elecciones de la opción C, pues leyendo las columnas de la tabla al revés, se podría pensar que 1 automóvil pasó con 5 personas, pero ninguno de los autos que pasó tenía 4 personas, porque el número 4 no aparece en la segunda columna de la tabla. Sin embargo, es probable que los estudiantes que marcaron este distractor se hayan dejado llevar simplemente por el hecho de que 5 está bajo 4 en la tabla y, por tanto, la cantidad de autos con 5 pasajeros es mayor que la cantidad de autos con 4 personas.

Los estudiantes que escogieron la opción D calculan la cantidad total de personas que pasaron por el lugar sumando los datos de la primera columna, sin advertir que en realidad la cantidad total de personas no se obtiene directamente de los datos de la tabla, pues hay que multiplicar los números de cada fila de la tabla y luego sumar estos resultados para obtener el total de pasajeros que pasaron por el lugar.

Los estudiantes que responden correctamente la pregunta anterior son capaces de interpretar los datos presentados en la tabla. Para esto, deben comprender que, en cada fila, los dos números que se muestran están relacionados mediante los títulos de cada columna y, luego, deben reconocer esa relación en las afirmaciones que se presentan como opciones de respuesta. Descartando, además, aquellas que no corresponden a información que pueda obtenerse de la tabla e identificando la que sí lo hace. El hecho de que la opción más popular corresponda a una mala lectura de los datos relacionada con el intercambio de lo que cada columna significa, entrega indicios de lo compleja que puede resultarles esta tarea a muchos estudiantes.

Analizando el tipo de representaciones de datos a las que los estudiantes de sexto grado ya se han visto expuestos, la complejidad en la lectura de esta tabla podría explicarse porque el contexto del que provienen los datos no pertenece al ámbito escolar y también porque las dos columnas contienen números naturales, por lo que los estudiantes no tienen pistas sobre cuál representa las frecuencias y cuál contiene las categorías de clasificación de los datos.

Para enfrentar la primera de estas dificultades se recomienda trabajar en el aula con tablas extraídas de los medios de comunicación, cuidando que los contextos de los que provienen los datos sean diversos en su temática y en la complejidad de la información que es posible extraer de ellos. El docente puede formar grupos de estudiantes para trabajar con tablas distintas, todas provenientes de los medios; solicitarle a cada grupo que produzca una serie de afirmaciones que correspondan a los datos que les entrega la tabla, pero también algunas que incorporen errores de lectura. Luego, el docente intercambiará las afirmaciones producidas con sus tablas respectivas entre los grupos, para que así cada grupo evalúe la veracidad o falsedad de las afirmaciones que otros estudiantes han producido.

En cuanto a la segunda dificultad, se sugieren actividades en que los estudiantes construyan tablas con datos que han recopilado ellos mismos. En este caso, obviamente, los contextos deben ser parte de la realidad de los estudiantes. Por ejemplo, pueden preguntar a todos los alumnos del curso por la cantidad total de hermanos que cada uno tiene. Para afianzar la distinción entre las categorías en que se organizarán los datos y las frecuencias, puede ser útil que en primera instancia los datos sean organizados en una tabla de conteo, para luego transitar a la tabla de frecuencias definitiva. La tabla de conteo tiene las ventajas de representar gráficamente las frecuencias y, por tanto, separarlas conceptualmente de las categorías en que se organizarán los datos (0 hermanos, 1 hermano, 2 hermanos, etc.); además de ser un instrumento que puede ser completado en el momento mismo de la recolección de los datos:

**¿Cuántos hermanos tienen los estudiantes del curso?**

| Cantidad de hermanos | Cantidad de estudiantes |
|---|---|
| 0 | / / / |
| 1 | / / / / / / |
| 2 | / / / / / |
| 3 | / / / |
| 4 | / |

**¿Cuántos hermanos tienen los estudiantes del curso?**

| Cantidad de hermanos | Cantidad de estudiantes |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 6 |
| 2 | 5 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1 |

La recolección de los datos y la construcción de las tablas deben ir acompañadas de preguntas intencionadas que permitan al estudiante leer y comprender la información presentada. Un ejercicio que puede resultar útil es solicitarles a los estudiantes que redacten una afirmación con la información que entrega cada una de las filas de la tabla. De este modo, deberán interpretar los títulos de cada columna y comprender la relación entre los números presentados en una misma fila.

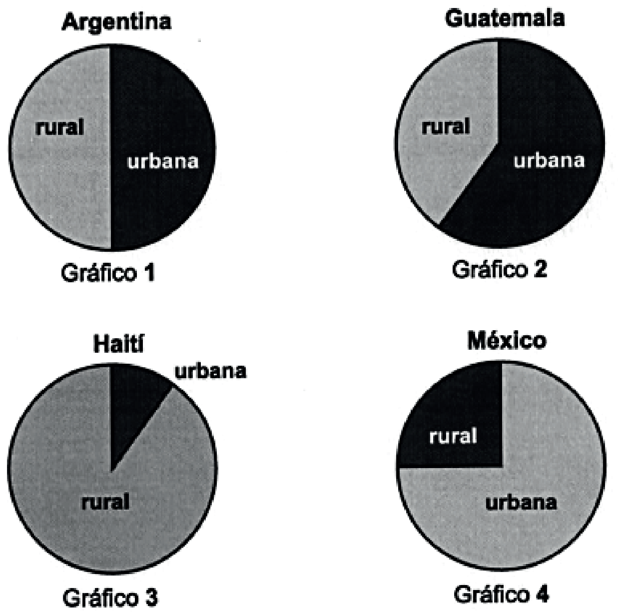
## **Pregunta 11:** De una tabla a un gráfico circular

*(La tabla / El cuadro)* siguiente registra el porcentaje de población urbana y rural de algunos países de América.

| PAÍS | POBLACIÓN % | |
|---|---|---|
| | Urbana | Rural |
| Argentina | 88 | 12 |
| Guatemala | 41 | 59 |
| Haití | 31 | 69 |
| México | 75 | 25 |

*Datos extraídos de Naciones Unidas. Urban and Rural Areas, 1994*

¿Cuál de los siguientes gráficos representa los datos de un país de acuerdo *(a la tabla / al cuadro)*?




**A)** Gráfico 1.

**B)** Gráfico 2.

**C)** Gráfico 3.

**D)** Gráfico 4.

**Tarea a realizar:** Identificar un gráfico circular que corresponde a los datos de una tabla.

| **Respuesta correcta:** | Porcentaje elección opción **A:** | Porcentaje elección opción **B:** | Porcentaje elección opción **C:** | Porcentaje elección opción **D:** | Porcentaje de omisión: |
|---|---|---|---|---|---|
| D | 19% | 19% | 17% | 40% | 3% |

Este problema requiere leer e interpretar los datos en la tabla de doble entrada, para luego representar la información en un gráfico circular.

- El gráfico 1 indica que el 50% de la población de Argentina es rural y el otro 50% es urbana. Los estudiantes que se inclinaron por esta opción claramente no comprendieron qué significa que la mitad del círculo esté pintada con un color y la otra mitad con otro. Es probable que simplemente marcaran esta opción por ser la única en que el círculo se divide en partes iguales, sin relacionar los datos numéricos de la tabla asociados a lo rural y lo urbano.

- El gráfico 2 fue escogido por los estudiantes que invierten la información de las columnas de la tabla al leerla, es decir, que asocian el 59% a la población urbana y el 41% a la población rural de Guatemala. Otra posibilidad es que realicen una lectura correcta de la tabla, pero que inviertan la información en el gráfico sin volver a mirar los datos tabulados para verificar su respuesta.

- Los estudiantes que optaron por el gráfico 3 tienen la noción de que el 69% de la población de Haití debe ser representada en el gráfico circular empleando más área que para el 31%, pero no cuantifican cuál debería ser la relación entre ambos sectores circulares en la representación.

La construcción de gráficos circulares involucra poner en juego la comprensión de varios conceptos matemáticos, como fracciones, razones, proporciones, porcentajes y ángulos.

Las secciones circulares están asociadas a la medida del ángulo del centro, lo que a su vez puede relacionarse con la idea de "giro". Anteriormente, se presentó una actividad en donde los estudiantes pueden trabajar con material concreto los ángulos como giros, asignando finalmente los grados sexagesimales que les corresponden por definición. Es posible complementar esta actividad haciendo un nexo con los porcentajes, de modo que los estudiantes puedan asociarlos a los ángulos que se forman al hacer girar el círculo de plástico transparente que se emplea en la tarea.

Una forma de construir un gráfico circular es multiplicando la frecuencia relativa por 360°, obteniendo la amplitud del ángulo central que corresponderá a cada dato. Este procedimiento involucra la comprensión del concepto de "fracción como parte de un todo", que también se trabajó anteriormente.

La construcción, lectura e interpretación de los gráficos circulares requiere del razonamiento proporcional de parte del estudiante. Lo ideal es trabajar en primera instancia con variables que posean pocos valores asociados, tal como en el problema presentado, de modo que la actividad en el aula se centre en la comprensión.

## Aprendizaje 7: **Resolver problemas complejos**

### **Pregunta 12:** Cajas necesarias de gelatina

La clase de Juan tiene 27 alumnos. ¿Cuántos paquetes de gelatina como el de la figura se necesitan como mínimo para prepararle una porción a cada alumno de esa clase?


*Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.*

*Escribe aquí tu respuesta:* ______________________________

**Tarea a realizar:** Resolver un problema complejo de variaciones proporcionales.

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes a esta pregunta abierta, se obtuvo que:

- 20% de los estudiantes entregó la respuesta correcta (4 paquetes).
- 24% dio respuestas incorrectas que provienen del cociente de la división 27:8 sin aproximar por exceso, por ejemplo: “3 paquetes”, “3 paquetes y medio”, “3,3 paquetes”, “3,375 paquetes”, “3 paquetes y 3 porciones”, “3 y 3/8 paquetes” o cualquier otra representación.
- 39% de los evaluados entregó otra respuesta al problema.
- 12% de los estudiantes omitió la pregunta.

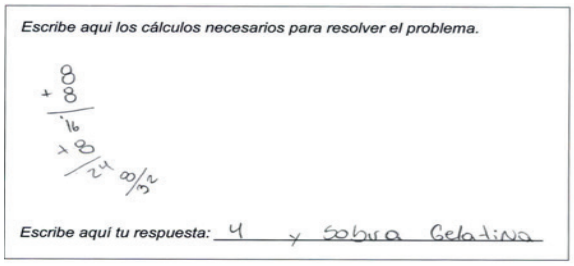
Resolver este tipo de problemas requiere que los estudiantes usen un razonamiento proporcional.

Deben relacionar dos magnitudes diferentes: la cantidad de paquetes de gelatina y la cantidad de porciones por paquete. Pero, además, deben establecer la relación entre dos cantidades de una misma magnitud, por ejemplo $\frac{27}{8}$. Razonar usando estas relaciones, tanto de manera cualitativa como cuantitativa, caracteriza el razonamiento proporcional (Chamorro, 2003).


La noción de razón como índice comparativo se pone en juego en este tipo de problemas: los estudiantes deben reconocer que en situaciones de proporcionalidad, la variación de una de las magnitudes implica cambios en la otra, de modo que el índice comparativo entre cantidades correspondientes se mantiene constante. Sin embargo, no basta que los estudiantes sean capaces de usar algoritmos memorísticos como la "regla de tres" o hallar la incógnita en una proporción "multiplicando cruzado", pues en el problema anterior la cantidad de porciones de gelatina que se necesita no es un múltiplo de 8, lo que implica realizar una interpretación de la respuesta numérica en términos del contexto.

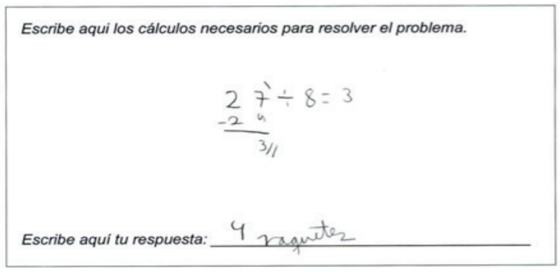
A continuación, se presentan ejemplos de diferentes razonamientos que permitieron a estudiantes resolver correctamente el problema:

- Sumando la cantidad de porciones que rinde cada paquete de gelatina una y otra vez hasta igualar o sobrepasar las 27 porciones que se necesitan.


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

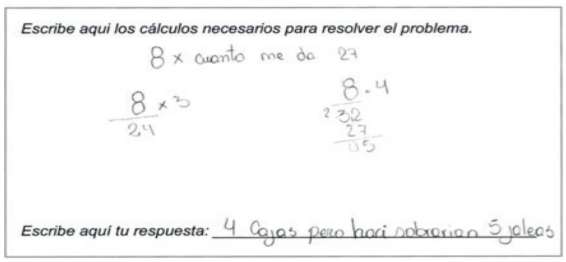
Escribe aquí tu respuesta: 4 y sobra Gelatina

- Dividiendo el total de porciones que se necesitan en las 8 que rinde cada paquete. Este procedimiento implica la interpretación del resto de la división en función del contexto.


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

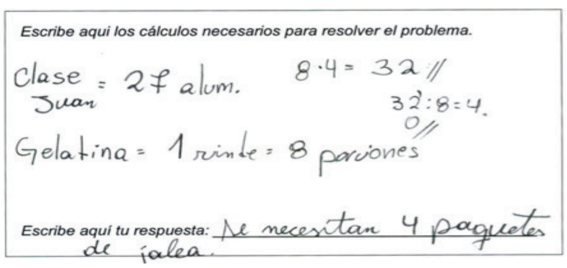
Escribe aquí tu respuesta: 4 paquetes

- Multiplicando las 8 porciones que rinde cada paquete por el número de paquetes que se necesita para completar 27 porciones, tanteando entre 3 y 4.


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

8 x cuanto me da 27

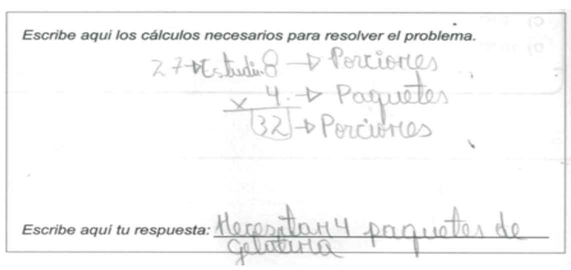
Escribe aquí tu respuesta: 4 Cajas pero hací sobrarían 5 jaleas


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

Clase Juan = 27 alum.

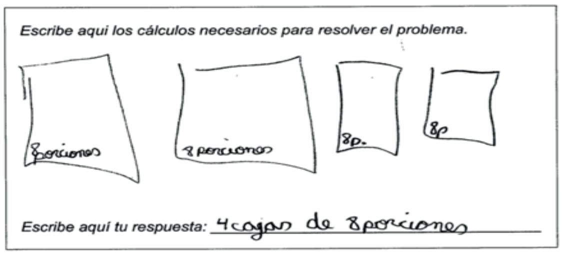
Gelatina = 1 rinde = 8 porciones

Escribe aquí tu respuesta: Se necesitan 4 paquetes de jalea.


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

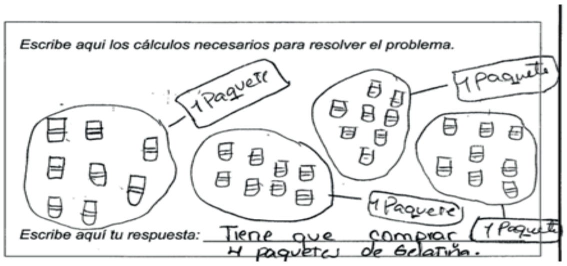
Escribe aquí tu respuesta: Necesitan 4 paquetes de gelatina

● Dibujando la situación de acuerdo al contexto.


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

8 porciones 8 porciones 8p. 8p

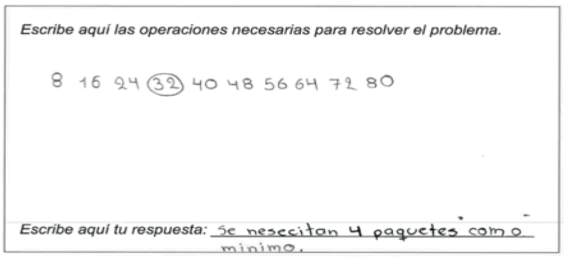
Escribe aquí tu respuesta: 4 cajas de 8 porciones


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

1 Paquete 1 Paquete 1 Paquete 1 Paquete

Escribe aquí tu respuesta: Tiene que comprar 4 paquetes de Gelatina.

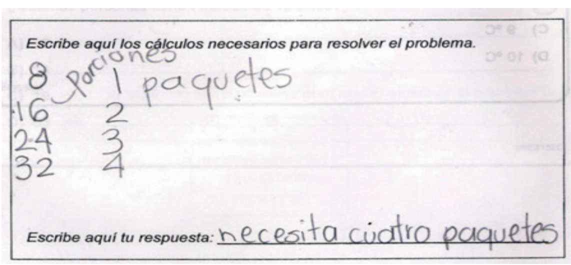
● Recurriendo a la lista de los múltiplos de 8, ya que cada paquete rinde 8 porciones.


Escribe aquí las operaciones necesarias para resolver el problema.

8 16 24 32 40 48 56 64 72 80

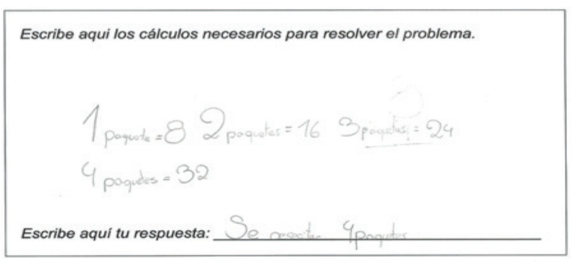
Escribe aquí tu respuesta: se nesecitan 4 paquetes como minimo.

● Empleando de manera más explícita la relación de proporcionalidad entre las magnitudes involucradas.


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

| porciones | paquetes |
|---|---|
| 8 | 1 |
| 16 | 2 |
| 24 | 3 |
| 32 | 4 |

Escribe aquí tu respuesta: necesita cuatro paquetes


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

1 paquete = 8 2 paquetes = 16 3 paquetes = 24

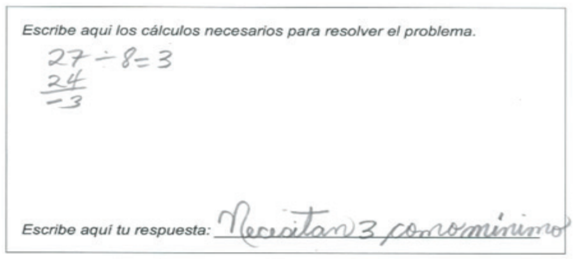
4 paquetes = 32

Escribe aquí tu respuesta: Se necesitan 4 paquetes

Entre los diferentes procedimientos de resolución, la mayoría emplea la noción de variación proporcional entre las magnitudes. Los estudiantes parecen comprender que si un paquete de gelatina rinde 8 porciones, entonces 2 paquetes rinden el doble (16 porciones), luego, 3 paquetes rendirán el triple (24 porciones), etcétera.

Las respuestas incorrectas de los estudiantes pueden ser asociadas a distintas problemáticas. A continuación, se presentan agrupadas según el razonamiento subyacente:

● Dentro del grupo de los estudiantes que escogió la división como operación para resolver el problema, se encuentran quienes dividieron el total de porciones que se necesitan (27) entre las 8 que rinde cada paquete, obteniendo como cociente 3 y resto 3, a partir de lo que concluyen que se necesitan 3 paquetes de gelatina. Un subgrupo de estos estudiantes además afirma que sobran 3 porciones de gelatina al usar 3 paquetes.

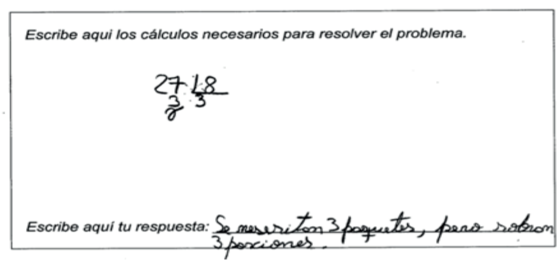

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

27 ÷ 8 = 3

24

−3

Escribe aquí tu respuesta: Necesitan 3 como mínimo


Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema.

27 | 8

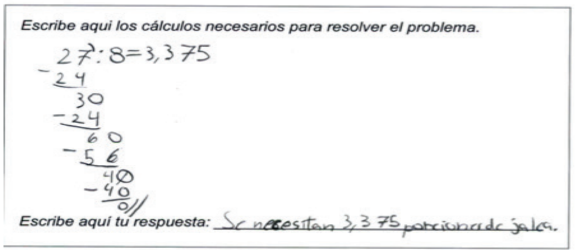
3 3

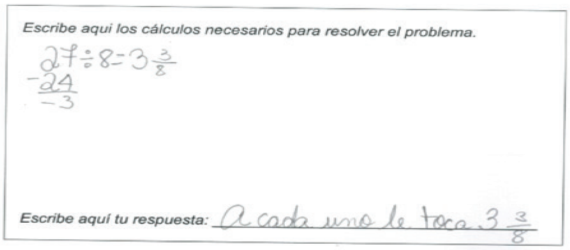
Escribe aquí tu respuesta: Se necesitan 3 paquetes, pero sobran 3 porciones.

Como se ha mencionado anteriormente, los problemas planteados en el aula deben dar la oportunidad al estudiante de dar sentido a todas las variables y resultados involucrados. En este caso, el estudiante parte desde un razonamiento correcto, escoge una estrategia de resolución correcta, pero no es capaz de interpretar los resultados obtenidos (cociente y resto) a la luz del contexto del problema.

Es relevante incentivar que los estudiantes comprueben sus respuestas y evalúen la pertinencia de las soluciones obtenidas, no solo desde lo matemático, sino que desde el contexto en que están insertos los problemas que se les plantean.

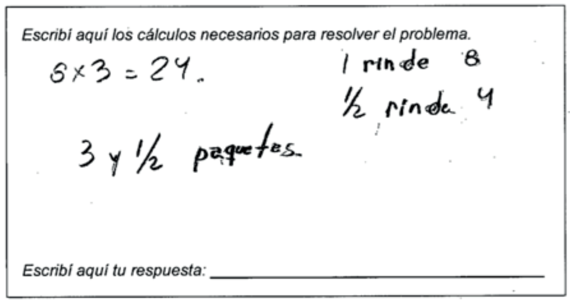
- Dentro de los estudiantes que escogieron la división como operación para resolver el problema, también se encuentran quienes dividieron el total de porciones que se necesitan (27) en las 8 que rinde cada paquete, obteniendo como cociente 3,375 o 3 enteros $\frac{3}{8}$.

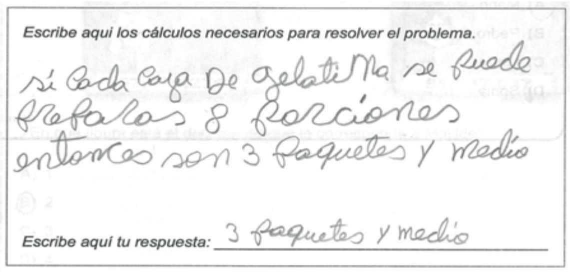


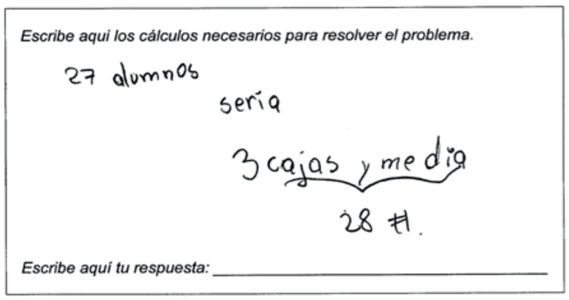




Para estos estudiantes, la cantidad de paquetes de gelatina que se necesita es 3,375. Claramente, ellos no dan significado a 3,375 paquetes ni interpretan el resultado en el contexto de la situación. Nuevamente, se encuentra un razonamiento que comienza correctamente, con una operación aritmética pertinente y matemáticamente correcta, pero sin una reflexión en torno a la coherencia del resultado final con respecto al contexto.

- Un grupo de estudiantes coincide en que la respuesta correcta es $3\frac{1}{2}$ paquetes de gelatina.

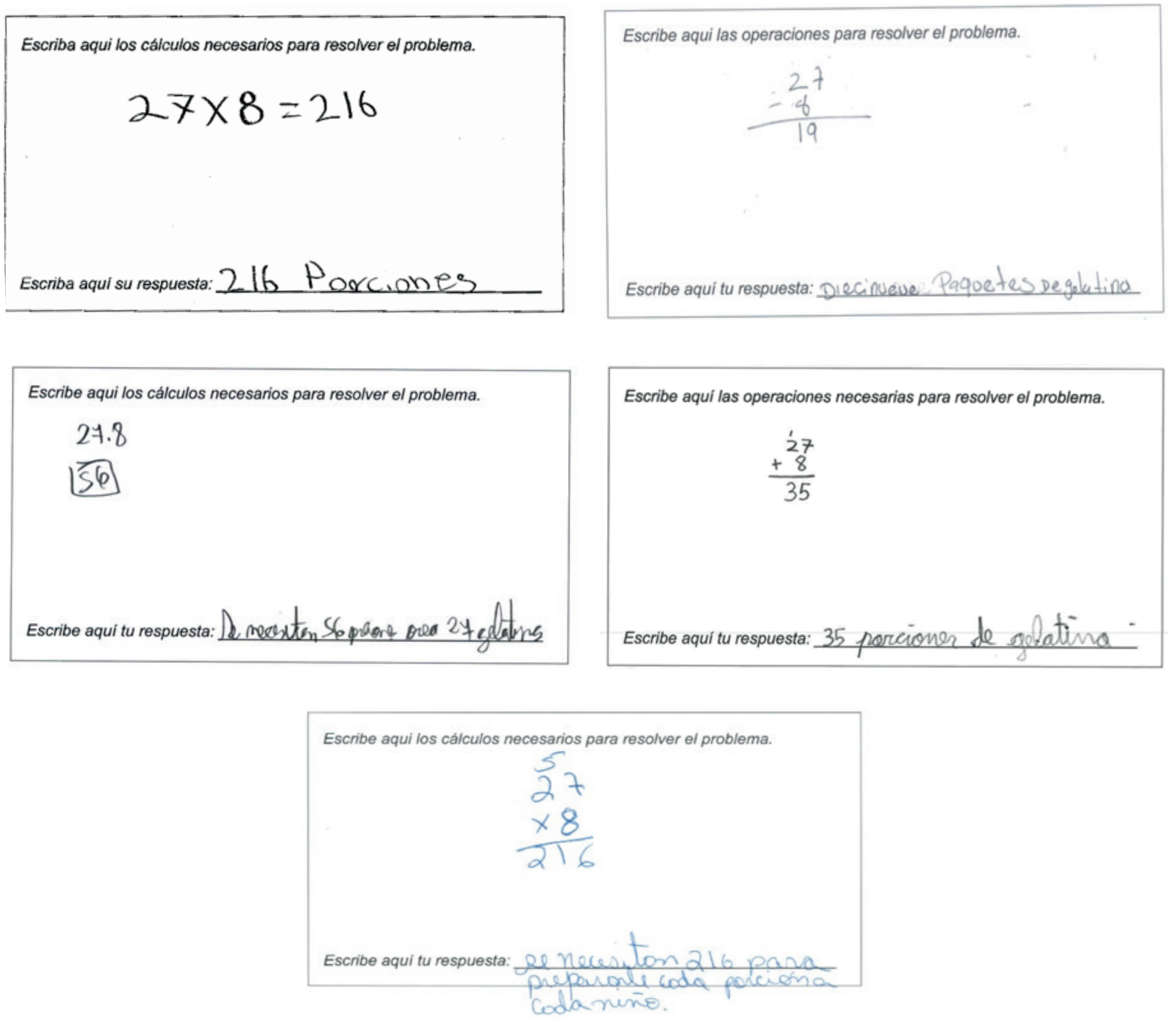



Otra vez, se encuentra un razonamiento con una base correcta, pero que termina en un sinsentido a la luz de la realidad. Es muy probable que estos estudiantes hayan pensado que dentro de la caja que se presenta en el enunciado viene la gelatina en polvo guardada en un sobre, que uno puede preparar 3 sobres completos y la mitad de otro, de modo de obtener 28 porciones que alcanzan para 27 personas que comen una porción cada una. Hasta ahí el desarrollo lógico corresponde al contexto, pero estos estudiantes no lograron incorporar en su análisis la consideración práctica y concreta de que para poder hacer todo lo anterior es necesario tener 4 paquetes de gelatina. Nuevamente, hay evidencia de la falta de interpretación del resultado en el contexto del problema.

- Existe un grupo de estudiantes que toma los datos del problema y los suma, resta o multiplica, obteniendo variadas respuestas.




En el contexto escolar surgen creencias como: todos los problemas tienen solución, siempre hay una única solución para cada problema, siempre se debe aplicar una operación aritmética para solucionar un problema y todos los datos del problema deben ser empleados en el cálculo de la solución (Márquez, Marcos & Moreno, 2008).

Las respuestas anteriores indican que estos estudiantes no comprenden el enunciado del problema. Es posible que los estudiantes tomen los números que aparecen explícitos en el enunciado (27 y 8) porque estén habituados a utilizar todos los datos numéricos de los problemas que se proponen en el aula, para luego sumarlos, restarlos, multiplicarlos o dividirlos porque tienen la creencia de que "algo" hay que hacer con ellos.

Existen investigaciones que dejan en evidencia este tipo de conductas automáticas, en donde los estudiantes seleccionan las cantidades del problema y aplican una operación aritmética cualquiera. Un claro ejemplo ha sido documentado por Stella Baruk (1985), en donde se propone el siguiente problema a estudiantes de primer ciclo de primaria:

*"Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Cuántos años tiene el capitán?"*

Solo el 12% de los estudiantes de 1° y 2°, y el 62% de los de 3° y 4°, afirmaban que no era posible averiguar la edad con la información disponible en el problema. El resto de los estudiantes obtenían la edad del capitán sumando la cantidad de ovejas y cabras en el barco (Márquez, Marcos & Moreno, 2008).

La mayoría de las dificultades que se han encontrado en la resolución del problema nada tienen que ver con la mala comprensión o ejecución de los algoritmos. Son de otra naturaleza: conciernen a la lectura y comprensión del enunciado, a la selección y organización de las informaciones pertinentes dadas en el enunciado y a la traducción de esta organización en términos matemáticos. La mayor dificultad es la interpretación del contexto (Chamorro, 2003).

A la luz de las respuestas de los estudiantes a esta pregunta abierta, se hace evidente la necesidad de reflexionar en torno a la práctica pedagógica, de plantearse la posibilidad de adecuar los procedimientos didácticos empleados en la enseñanza de resolución de problemas, de indagar en cómo están funcionando cognitivamente los estudiantes frente a diferentes problemas propuestos. El eje central de la formación matemática escolar es el desarrollo de la capacidad de resolver problemas. La manera en que los estudiantes logren resolver un problema depende de la representación que se hayan hecho de la situación planteada, lo que obedece a su edad, a las características de su pensamiento, a sus capacidades cognitivas, a sus experiencias y a conocimientos previos, entre otros factores que inciden en este complejo proceso.

Normalmente, el quehacer pedagógico se enfoca en el desarrollo de las herramientas y procedimientos que los estudiantes requieren para enfrentar los problemas que se le plantean. Pero las habilidades que terminan siendo fundamentales en la resolución de problemas se relacionan más bien con la selección de datos, la interpretación de resultados, el análisis de existencia, unicidad y pertinencia de las soluciones.

Incorporar permanente y activamente la formación del pensamiento crítico en los estudiantes en las metas de enseñanza de la matemática se relaciona directamente con el desarrollo de las competencias necesarias para la resolución de problemas. Los ejemplos de problemas y las recomendaciones y sugerencias de actividades entregados a lo largo de este capítulo intentan orientar concretamente la labor docente en esta desafiante tarea.

# Síntesis, discusión y proyecciones del estudio

En el marco del TERCE, las pruebas de matemática que se aplicaron en los países participantes en el estudio pretenden entregar información sobre los niveles de aprendizaje logrados por los estudiantes de tercer y sexto grados, identificando fortalezas y debilidades en los distintos dominios temáticos y procesos cognitivos, con el objetivo de determinar factores que incidan en el mejoramiento de esos aprendizajes.

Por la naturaleza de un estudio como el TERCE, se espera que sus usos se canalicen principalmente en la toma de decisiones e innovaciones en las políticas públicas de los países involucrados. Sin embargo, la riqueza de la información que se genera en una evaluación masiva de estas características debería ser aprovechada en todos los niveles posibles, intentando alcanzar a la mayor cantidad de actores del sistema educativo. El uso que se haga de la información que entrega un instrumento de evaluación de aprendizajes definirá la relevancia de la evaluación misma.

Por esto, es fundamental analizar los resultados con distintos niveles de desagregación y diversos focos de atención. En particular, en este libro, además de presentarse los resultados según niveles de desempeño, dominios temáticos y procesos cognitivos, se ha realizado un análisis de preguntas específicas con la intención de explicar sus resultados en términos de las habilidades, conocimientos y competencias que los evaluados requirieron desarrollar para enfrentar exitosamente dichos problemas, y entregando sugerencias de intervenciones pedagógicas que permitan mejorar los aprendizajes de los estudiantes que presentaron dificultades.

En términos de los resultados por dominios temáticos, en ambos niveles de enseñanza el porcentaje promedio máximo

**de logro** se alcanzó en el campo de la variación. En promedio, los estudiantes de tercer grado respondieron correctamente el 61% de las preguntas de variación, mientras que los evaluados de sexto grado lograron contestar el 47% de las preguntas de ese dominio correctamente. También hay coincidencia entre grados para el mínimo porcentaje promedio de logro, que se produjo en el campo de la medición: en tercer grado, en promedio, solo el 39% de las preguntas de ese dominio fueron respondidas correctamente y en sexto grado, 41% de las preguntas de medición fueron respondidas correctamente en promedio (e igual porcentaje se aprecia en el dominio Geometría en sexto grado).

Estos resultados podrían indicar que el campo de la variación es una de las fortalezas de los estudiantes, tanto en 3° grado como en 6° grado, mientras que el campo de la medición sería una de sus debilidades. Sin embargo, una conclusión como la anterior requeriría estudiar con más detalle las distribuciones por proceso cognitivo y por dificultad de los ítems de esos dominios. Las comparaciones entre los desempeños en los distintos dominios temáticos deben hacerse con cautela y solo en casos en que las diferencias son significativas. Entre los distintos dominios de la prueba de sexto grado, por ejemplo, las diferencias son relativamente pequeñas y ningún desempeño promedio en un dominio destaca significativamente sobre los desempeños promedio en los otros.

En cuanto a los resultados por procesos cognitivos, el comportamiento es similar en ambos grados: el mayor porcentaje promedio de logro se produce en las preguntas asociadas al proceso de Reconocimiento de objetos y elementos (con un promedio de 64% de respuestas correctas en tercer grado y de 55% de respuestas correctas en sexto grado). Le sigue el porcentaje promedio de logro de las preguntas asociadas al proceso de Resolución de problemas simples (con un promedio de 41% en ambos grados) y, por último, el menor logro promedio se produce en las preguntas asociadas al proceso de Resolución de problemas complejos (con un promedio de 36% de respuestas correctas en tercer grado y de 35% en sexto grado).

Los procesos cognitivos se relacionan estrechamente con los niveles de desempeño, pues las definiciones de dichos niveles consisten en una graduación creciente en complejidad de los logros de aprendizaje de los estudiantes y esta complejidad se asocia bastante con los procesos cognitivos: los primeros niveles de desempeño (I y II) quedan definidos principalmente por tareas de identificación de conceptos, propiedades, relaciones y objetos matemáticos frecuentemente trabajados en el aula; mientras que los niveles de desempeño superiores (III y IV) se definen mayoritariamente por tareas de aplicación –planteadas como problemas simples o complejos– de esos conceptos, propiedades, relaciones y objetos matemáticos en diversos contextos.

El análisis curricular del TERCE establece: "Como eje principal de la formación matemática, la habilidad para resolver problemas requiere del uso de todas las habilidades del pensamiento. Es el punto de transición entre los niveles inferencial y crítico de las habilidades del pensamiento, que ayuda a aprender y a reflexionar; en este aspecto, el alumno debe demostrar cómo hacer uso de las habilidades y conocimientos en diversas situaciones que se le presentan" (OREALC/UNESCO Santiago, 2013, p. 191). En virtud de lo anterior, este libro centró sus reflexiones sobre los resultados de preguntas específicas y sus propuestas didácticas en la necesidad de desarrollar la habilidad de los estudiantes para enfrentarse exitosamente a contextos variados que les exigen aplicar los conocimientos matemáticos que poseen, y en plantear a los docentes el desafío de incluir o fortalecer en su trabajo de aula discusiones sobre la existencia, unicidad y pertinencia de la soluciones obtenidas en función del contexto en que se plantean los problemas.

# Referencias bibliográficas


**Araceli, R. & Montiel,** G. (2009). La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria. Aportaciones para un diseño escolar, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 25-33.

**Baruk, S. (1985).** L'âge du capitaine. De l'erreur en mathematiques. París: Seuil.

**Borges, M. (2001).** Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Revista de didáctica de las matemáticas, Volumen 45. Recuperado desde: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo05.pdf

**Brousseau, G. (1998).** Teoría de las situaciones didácticas.

**Caggiani, I., Pastrana, N. & Alliaume, J. (2009) Magnitud y medida.**
El lugar de las ideas previas de los niños en la estimación; la experimentación y las prácticas de medidas.

**Calero, M. (2009).** Aprendizaje sin límites. Constructivismo. México DF, México: Alfaomega Grupo Editor.

**Castorina, José Antonio y Dubrovsky, Silvia. (2004).** Psicología Cultura y Educación: Perspectivas desde la obra de Vigotski. México, Ediciones Novedades Educativas.

**Castro, E. (2001).** Números decimales. Didáctica de la Matemática en la educación primaria, 315-345. Síntesis Educación.

**Chamorro, M. (1995).** Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria. Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2(4), 87-96.

**Chamorro, M. (2003).** Didáctica de las Matemáticas para primaria, Pearson Educación, Madrid.

**Chamorro, M. (2003).** El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. Didáctica de las Matemáticas para primaria. Madrid: Pearson Educación.

**Chamorro, M. (2005).** Didáctica de las Matemáticas para educación infantil, Pearson Educación, Madrid.

**Cizek, G., & Bunch, M. (2007).** Standard setting: A guide to establishing and evaluating performance standards on tests. SAGE Publications Ltd.

**D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007).** Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10 (1), 39-68.

**De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996).** Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. Revista mexicana de investigación educativa, 1(2), 268-282.

**García, C., Luis, M., & Luengo González, R. (2005).** Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. Enseñanza de las Ciencias, 23(2), 201-216.

**Gómez, J. M. B. y González, E. F. (2001).** Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Ministerio de Educación de España.

**Itzcovich, H. y Broitman C. (2001).** Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB. Dirección General de Educación Básica, Provincia de Buenos Aires.

**Lago, M. O., Rodríguez, P., Arana, I. E., Jiménez, L. y Dopico, C. (2008).** "Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos": un estudio sobre los problemas de división con resto en alumnos de 1º de ESO. Anales de psicología, 24(2), 201-212.

**Luque, D. & Rodríguez, G. (2005).** Dificultades en el Aprendizaje: Unificación de Criterios Diagnósticos. Andalucía, España: Junta de Andalucía. Consejería de Educación. Dirección General de Participación y Solidaridad en la Educación.

**Márquez, L. J., Marcos, P. R., & Moreno. (2008) Las creencias incorrectas de los niños sobre las matemáticas:** ¿por qué fracasan cuando tienen que resolver problemas no-rutinarios?, Revista de Psicología, Nº 1, 69-76.

**Ministerio de Educación Nacional de la República de Colombia. (1998).** Lineamientos curriculares de Matemática. Consultado el 19 de abril de 2015. En: www.mineducacion.gov.co/1621/w3-article-339975.html

**Mitzel, H. C., Lewis, D. M., Patz, R. J., & Green, D. R. (2001).** The bookmark procedure: Psychological perspectives. Setting performance standards: Concepts, methods, and perspectives, 249–281.

**Moreira, Marco Antonio. (2005).** Aprendizaje significativo crítico (Critical meaningful learning). Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, 83-102.

**Peng Yee, L. (2014).** La enseñanza de la matemática en educación básica: un libro de recursos. Santiago, Chile: Academia Chilena de Ciencias.

**Serrano, J. M. y Pons, R. M. (2011).** El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 13(1). Consultado el 19 de abril de 2015. En: redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html

**OREALC/UNESCO Santiago. (2013).** Análisis curricular del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo TERCE. Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe.

**Zieky, M., Perie, M., & Livingston, S. (2006).** A primer on setting cut scores on tests of educational achievement. Princeton, NJ: Educational Testing Service.

terce

TERCER ESTUDIO REGIONAL COMPARATIVO Y EXPLICATIVO

# Aportes para la Enseñanza de la Matemática

Este libro forma parte de una colección más amplia, denominada "Aportes para la Enseñanza". Se trata de cuatro ejemplares, uno por cada área evaluada en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo, TERCE (lectura, escritura, matemática y ciencias naturales), que llevó a cabo el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), organismo compuesto por 15 países de la región y coordinado por la OREALC/UNESCO Santiago.

Estos cuatro volúmenes tienen el mismo propósito fundamental: utilizar los resultados del TERCE para acercar los resultados de la evaluación de logros de aprendizaje a los docentes y entregarles herramientas para su trabajo en el aula.

"Aportes para la enseñanza de la Matemática" se organiza en cinco secciones. La primera hace una presentación de la prueba, relevando los aprendizajes que evalúa. La segunda sección detalla los resultados de los estudiantes en los distintos dominios y procesos cognitivos evaluados. La tercera describe el enfoque de la enseñanza de la matemática en la región, a partir de la revisión del análisis curricular que sirve como marco de evaluación de las pruebas, especificando los propósitos, objetivos, características y orientación de la enseñanza de esta disciplina. La cuarta sección se acerca al tema de la evaluación, y el modo en que es posible monitorear el avance de los estudiantes en la adquisición de los aprendizajes centrales de la disciplina. Finalmente, se abordan los resultados del TERCE y su relación con el trabajo docente; se muestran ejemplos de preguntas que representan distintos niveles de logro y se entregan sugerencias o propuestas de prácticas pedagógicas para promover que los estudiantes alcancen los niveles más avanzados.

Confiamos en que este texto sea un valioso insumo para que los maestros puedan sacar provecho de los resultados del TERCE, transformándose en una herramienta de trabajo que vaya en beneficio de los estudiantes. Este hecho constituye uno de los objetivos esenciales de OREALC/UNESCO Santiago con la calidad de la educación y en particular con la evaluación de ésta, pues consideramos que el destino final de los estudios debe ser el aula, donde efectivamente tienen lugar los procesos de mejora del aprendizaje. Este es el valor y fin último de los textos de "Aportes para la Enseñanza" y es el esfuerzo en el que estamos comprometidos.